Inégalité de Bernoulli

Proposition. Pour tout $x \geqslant 1$, pour tout entier $n \geqslant 1$, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

Démo. Par récurrence sur $n \geqslant 1$. Si $n = 1$ c'est facile.
Supposons que $\forall\, x \geqslant -1$, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$. Alors si $x \geqslant -1$, on a :

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geqslant (1+x)(1+nx)$$

par hypothèse de récurrence et car $1+x \geqslant 0$. Donc

$$(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x$$

ce qui achève la récurrence.

Corollaire 1. Si $0 \leqslant |q| < 1$, alors $\lim_n q^n = 0$.
Démo. Si $q \neq 0$, soit $x = \frac{1}{|q|} - 1 > 0$.
Soit $\epsilon > 0$. D'après l'inégalité de Bernoulli :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ |q|^n = \frac{1}{(1+x)^n} \leqslant \frac{1}{1+nx} \ .$$

Or, il existe N tel que $1+Nx > \frac{1}{\epsilon}$. Alors :

$$\forall\, n \geqslant N,\ |q|^n \leqslant \frac{1}{1+nx} \leqslant \frac{1}{1+Nx} < \epsilon \ .$$

Corollaire 2. Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la suite $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n_{n\geqslant N}$ est croissante.
Démo. Soit $u_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Soit $N \geqslant 2|x|$. Soit $n \geqslant N$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$$

$$= \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}$$

$$= \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(\frac{n(n+1+x)}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}$$

or, $n(n+1+x) = (n+1)(n+x) - x$. Donc :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}$$

$$\geqslant \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-(n+1)\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)$$

d'après l'inégalité de Bernoulli [†]

$$= \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n+x}\right) = 1 \ .$$

†. car $\left|\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right| = \frac{|x|}{(n+1)|n+x|} \leqslant \frac{|x|}{(n+1)(n-|x|)} \leqslant \frac{|x|}{(n+1)|x|} = \frac{1}{n+1} \leqslant 1.$