Un exemple de suites adjacentes et définition de l'exponentielle

Soit $x \geqslant 0$, soit $N \geqslant |x|$. Pour tout $n \geqslant N$, on note :

$$e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,\ E_n(x) = \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} \ .$$

Proposition.

i) $\forall\, n \geqslant N$, $e_n(x) \leqslant E_n(x)$.

ii) La suite $(e_n(x))_{n \geqslant N}$ est croissante et la suite $(E_n(x))_{n \geqslant N}$ est décroissante.

iii) $\lim_n E_n(x) - e_n(x) = 0$.

On notera $e(x) := \lim_n e_n(x) = \lim_n E_n(x)$.

Démonstration :

i) $e_n(x) \leqslant E_n(x) \Leftrightarrow (1 + \frac{x}{n})^n (1 - \frac{x}{n})^n \leqslant 1 \Leftrightarrow (1 - \frac{x^2}{n^2})^n \leqslant 1$.

ii) Montrons que $(E_n(x))_{n \geqslant N}$ décroît.

Si $n \geqslant N$, alors

$$\frac{E_n(x)}{E_{n+1}(x)} = \frac{\frac{1}{(1-\frac{x}{n})^n}}{\frac{1}{(1-\frac{x}{n+1})^{n+1}}}$$

$$= \frac{(1 - \frac{x}{n+1})^{n+1}}{(1 - \frac{x}{n})^n}$$

$$= \left(\frac{1 - \frac{x}{n+1}}{1 - \frac{x}{n}}\right)^{n+1} (1 - \frac{x}{n})$$

or,

$$\frac{1 - \frac{x}{n+1}}{1 - \frac{x}{n}} = \frac{(n+1-x)n}{(n-x)(n+1)} = \frac{(n-x)n + n}{(n-x)(n+1)} = \frac{(n-x)(n+1) - (n-x) + n}{(n-x)(n+1)}$$

$$= 1 + \frac{x}{(n+1)(n-x)} \ .$$

Donc d'après l'inégalité de Bernoulli :

$$\frac{E_n(x)}{E_{n+1}(x)} = ()^{n+1} (1 - \frac{x}{n}$$

$$\geqslant (1 + \frac{x}{n-x})(1 - \frac{x}{n}) = 1 \ .$$

iii) Pour tout $n \geqslant N$, on a :

$$0 \leqslant E_n(x) - e_n(x) = \frac{1}{(1-\frac{x}{n})^n} - (1+\frac{x}{n})^n$$

$$= \frac{1-(1-\frac{x^2}{n^2})^n}{(1-\frac{x}{n})^n}$$

or, d'après l'inégalité de Bernoulli,

$$(1-\frac{x^2}{n^2})^n \geqslant 1 - \frac{x^2}{n}$$

donc :

$$0 \leqslant E_n(x) - e_n(x) \leqslant \frac{x^2}{n} E_n(x) \leqslant \frac{x^2}{n} E_N(x) \longrightarrow_{n\infty} 0 \ .$$

Q.e.d.

Lemme. Soit (x_n) une suite réelle qui converge vers $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lim_n (1+\frac{x_n}{n})^n = e(x) \ .$$

Démonstration : Comme la suite (x_n) converge, il existe $N > \sup_n |x_n| + |x|$. Si $n \geqslant N$, on a :

$$\frac{(1+\frac{x_n}{n})^n}{e_n(x)} = \left(\frac{n+x_n}{n+x}\right)^n$$

$$= \left(1+\frac{x_n-x}{n+x}\right)^n \geqslant 1 + \frac{n}{n+x}(x_n - x) \longrightarrow_{n\infty} 1$$

en utilisant l'inégalité de Bernoulli.

Mais on a aussi :

$$\frac{(1+\frac{x_n}{n})^n}{e_n(x)} = \left(1+\frac{x_n-x}{n+x}\right)^n$$

$$\leqslant \frac{1}{\left(1-\frac{x_n-x}{n+x}\right)^n}$$

$$\leqslant \frac{1}{1-n\frac{x_n-x}{n+x}} \longrightarrow_{n\infty} 1$$

en utilisant encore l'inégalité de Bernoulli. **Q.e.d.**

$\boxed{\textbf{Proposition. } \forall\, x, x' \in \mathbb{R},\ e(x)e(x') = e(x+x').}$

Démonstration : On a

$$e_n(x)e_n(x') = \left((1+\frac{x}{n})(1+\frac{x'}{n})\right)^n = \left((1+\frac{x+x'+\frac{xx'}{n}}{n}\right)^n \ .$$

Or, $\lim_n x + x' + \frac{xx'}{n} = x + x'$ donc d'après le lemme précédent,

$$\lim_n e_n(x)e_n(x') = e(x+x') \ .$$

Q.e.d.