Université Lyon I
Département de Mathématiques

Année universitaire 2023-2024
L3 Mathématiques générales et applications
Algèbre linéaire et bilinéaire, analyse matricielle

FEUILLE D'EXERCICES 9 : PROBLÈMES AUX MOINDRES CARRÉS

Exercice 1. *Régression linéaire*
Trouver la droite du plan qui passe au plus près (au sens des moindres carrés) des points $(0,1)$, $(1,2)$ et $(3,3)$.

Exercice 2. *Moindres carrés et équation normale*
On définit $A \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^4$ par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer les solutions de l'équation $Ax = b$ au sens des moindres carrés.
(2) Quelle est l'erreur d'approximation ?

Exercice 3. *Approximation polynômiale au sens des moindres carrés*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$. On souhaite approcher une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont on connaît seulement les valeurs $y_1, \ldots, y_n$ qu'elle prend en n points $t_1, \ldots, t_n$. Pour cela on fixe un degré $d \in \mathbb{N}$ et on détermine une approximation de f dans l'espace $\mathcal{P}_d$ des polynômes de degré inférieur ou égal à d. On cherche donc $P \in \mathcal{P}_d$ tel que

$$\left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P(t_1) \\ \vdots \\ P(t_n) \end{pmatrix} \right\| = \min_{Q \in \mathcal{P}_d} \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q(t_1) \\ \vdots \\ Q(t_n) \end{pmatrix} \right\|.$$

(1) Écrire le problème comme la résolution au sens des moindres carrés d'un système $A\,x = b$ pour une certaine matrice $A \in \mathcal{M}_{n,d+1}(\mathbb{R})$ et un certain vecteur $b \in \mathbb{R}^n$.
(2) Pour $d = 0, 1$, résoudre explicitement le problème quand il possède une unique solution.
(3) On suppose que les points $t_1, \ldots, t_n$ sont deux à deux distincts.
À quelle condition sur d la matrice A^*A est-elle inversible ?

Exercice 4. *Moindres carrés et décomposition QR*
Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ avec $m \geq n$. On suppose que A est de rang n. On rappelle que les méthodes de Gram-Schmidt ou Householder permettent d'obtenir une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $R \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux positifs telles que

$$A = Q \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que R est inversible.
(2) Montrer que résoudre le problème $Ax = b$ (pour $b \in \mathbb{R}^m$) au sens des moindres carrés est équivalent à résoudre une équation du type $Rx = c$.
(3) Soit la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Identifier $\operatorname{Im} D$ et $\operatorname{Ker} D$. Résoudre au sens des moindres carrés le problème $Dx = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t$.
(4) Que peut-on dire de la solution au sens des moindres carrés de $Dx = (3 \;\; 0 \;\; -3 \;\; -2)^t$?