Université Lyon I
Département de Mathématiques

Année universitaire 2023-2024
L3 Mathématiques générales et applications
Algèbre linéaire et bilinéaire, analyse matricielle

FEUILLE D'EXERCICES 8 : MÉTHODES ITÉRATIVES, RECHERCHE DE VALEURS PROPRES

Exercice 1. *Convergence des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel*
Examiner la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour les deux matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. *Une comparaison des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel*
Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer les valeurs propres de A.
On pourra commencer par obtenir une valeur propre évidente en remarquant que la somme des éléments de chaque ligne de A est la même.
(2) Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle symétrique définie positive ?
(3) Écrire la matrice J de l'itération de Jacobi.
Pour quelles valeurs de a la méthode de Jacobi converge-t-elle ?
(4) Écrire la matrice $\mathcal{L}_{GS}$ de l'itération de Gauss-Seidel.
(5) Pour quelles valeurs positives ou nulles de a la méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle ?
(6) Pour $a \in]0, \frac{1}{2}[$, comparer les vitesses de convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.

Exercice 3. *Théorème de Gerschgorin.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\lambda - A_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |A_{i,j}| \right\}.$$

Application : en déduire que toute matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

Exercice 4. *Méthode de la puissance.*
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer les modes propres, i.e. les valeurs propres et des vecteurs propres de A.
(2) Soit $x \in \mathbb{C}^2$ non nul.
 (a) Calculer $(A^k x)_{k \in \mathbb{N}}$.
 (b) On pose $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} = \left(\frac{A^k x}{\|A^k x\|} \right)_{k \in \mathbb{N}}$. À quelle condition sur x la suite $(\langle A x_k, x_k \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle vers une valeur propre de A ?

Exercice 5. *Méthode QR.*
Calculer les itérations successives de la méthode QR de recherche de valeurs propres pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Qu'en conclure ?

Exercice 6. *Méthode de la puissance inverse avec translation*
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ($p \leq n$) ses valeurs propres distinctes. Pour $i \in \{1, \dots, p\}$ donné, on souhaite calculer λ_i. Soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}$ qu'on suppose ne pas être orthogonal à $\ker(A - \lambda_i I)$. On suppose également qu'on connaît μ tel que $0 < |\mu - \lambda_i| < |\mu - \lambda_j|$ pour tout $j \neq i$. On définit la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ par $(A - \mu I)x^{(k+1)} = x^{(k)}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

(1) Vérifier que la construction de la suite revient à appliquer la méthode de la puissance à la matrice $(A - \mu I)^{-1}$.
(2) Montrer que $x^{(k)}(\lambda_i - \mu)^k \to x$, quand $k \to \infty$, où x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.
(3) Montrer que $\frac{\|x^{(k+1)}\|}{\|x^{(k)}\|} \to \frac{1}{|\mu - \lambda_i|}$ quand $k \to \infty$.

Exercice 7. *La méthode de Jacobi comme méthode de descente*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour minimiser une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, on appelle méthode de descente à pas fixe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ la méthode itérative définie par la récurrence

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha w^{(k)} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

où $w^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, qu'on appelle alors *direction de descente stricte*, vérifie $(w^{(k)})^t \nabla f(x^{(k)}) < 0$ pour tout k tant que $x^{(k)}$ ne réalise pas un minimum local de f.
Dans toute la suite, on considère le cas quadratique où, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \frac{x^t A x}{2} - x^t b$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$ donnés.

(1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f(x) = Ax - b$. Qu'obtiendrait-on si A n'était pas symétrique ?
(2) On veut montrer que la méthode de Jacobi pour la résolution itérative du système $Ax = b$ est une méthode de descente. On utilise les notations suivantes : $A = D - E - F$ où D est diagonale, E triangulaire inférieure stricte et F triangulaire supérieure stricte.
   (a) Justifier que D est inversible.
   (b) Montrer que la méthode de Jacobi se réécrit sous la forme : pour tout $k \in \mathbb{N}$,
   $$x^{(k+1)} = x^{(k)} + w^{(k)}, \qquad \text{où } w^{(k)} = D^{-1} r^{(k)} \quad \text{avec } r^{(k)} = b - Ax^{(k)}.$$
   (c) En déduire que la méthode de Jacobi est une méthode de descente (avec $\alpha = 1$).
(3) Pour améliorer la méthode de Jacobi, on va remplacer le pas fixe $\alpha = 1$ par un pas *optimal*, $\alpha^{(k)}$, dépendant de l'itération, défini comme réalisant le minimum sur $\mathbb{R}_+$ de $\alpha \longmapsto f(x^{(k)} + \alpha w^{(k)})$, pour le $w^{(k)}$ trouvé à la question précédente.
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $w^{(k)} \neq 0$. On note $g_k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\alpha \longmapsto f(x^{(k)} + \alpha w^{(k)})$. Montrer que g_k admet un unique minique global, au point $\alpha^{(k)} = \dfrac{|{w^{(k)}}^T r^{(k)}|^2}{{w^{(k)}}^T A w^{(k)}}$.

   Dans la suite de l'exercice, on étudie la suite définie par
   $$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} w^{(k)} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $w^{(k)} \neq 0$.
      (i) Montrer que $|f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)})| = \dfrac{|{w^{(k)}}^T r^{(k)}|^2}{2{w^{(k)}}^T A w^{(k)}}$.
      (ii) En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $|f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)})| \geq C \|r^{(k)}\|^2$.
   (c) Montrer que la suite réelle $\big(f(x^{(k)})\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge. En déduire que $r^{(k)}$ tend vers $0 \in \mathbb{R}^n$ lorsque k tend vers l'infini.
   (d) Montrer que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la solution x du système $Ax = b$ quand k tend vers l'infini.
   (e) Quel résultat de convergence vient-on de démontrer sur la méthode de Jacobi à pas optimal ? Comparer les conditions (conditions sur A) de convergence de la méthode de Jacobi et de la méthode de Jacobi à pas optimal. On pourra considérer le cas de la matrice de l'exercice précédent avec $a = 3/4$.