Université Lyon I
Département de Mathématiques

Année universitaire 2023-2024
L3 Mathématiques générales et applications
Algèbre linéaire et bilinéaire, analyse matricielle

FEUILLE D'EXERCICES 7 : NORMES MATRICIELLES, CONDITIONNEMENT

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1. *(Norme de Frobenius)* La norme de Frobenius d'une matrice $A = (A_{i,j})_{i,j \in \{1,\dots,n\}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|^2 \right)^{1/2}.$$

(1) Montrer que la norme de Frobenius est une norme matricielle et qu'elle vérifie $\|A\|_F^2 = \mathrm{Tr}(A^*A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(2) Montrer que la norme de Frobenius n'est pas une norme subordonnée.

(3) Montrer que si $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est unitaire et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors
$$\|UA\|_F = \|AU\|_F = \|A\|_F.$$

(4) Montrer que si A est une matrice normale, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors
$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Exercice 2. *(Normes subordonnées $\|\!|\cdot|\!\|_\infty$ et $\|\!|\cdot|\!\|_1$)* On rappelle la définition des normes ℓ^∞ et ℓ^1 sur $\mathbb{K}^n \approx \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$: pour tout $x = (x_1 \ \cdots \ , x_n) \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.
On note $\|\!|\cdot|\!\|_\infty$ et $\|\!|\cdot|\!\|_1$ les normes subordonnées sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
$$\|\!|A|\!\|_\infty = \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \qquad \text{et} \qquad \|\!|A|\!\|_1 = \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}.$$
Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
$$\|\!|A|\!\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}| \qquad \text{et} \qquad \|\!|A|\!\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|.$$

Exercice 3. *(Norme subordonnée à la norme 2)*
On rappelle la définition du produit scalaire canonique sur $\mathbb{K}^n$ et de la norme associée :
pour tout $x = (x_1 \ \cdots \ , x_n), y = (y_1 \ \cdots \ , y_n) \in \mathbb{K}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i$ et $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$.
On note $\|\!|\cdot|\!\|_2$ la norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
$$\|\!|A|\!\|_2 = \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(1) Montrer que la norme 2 sur $\mathbb{K}^n$ est invariante par transformation unitaire : si U est tel que $U^*U = \mathrm{I}_n$, alors pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $\|Ux\|_2 = \|x\|_2 = \|U^*x\|_2$.

(2) Montrer que la norme 2 subordonnée est invariante par transformation unitaire : si U est tel que $U^*U = \mathrm{I}_n$, alors
$$\|\!|A|\!\|_2 = \|\!|UA|\!\|_2 = \|\!|AU|\!\|_2 = \|\!|U^*AU|\!\|_2.$$

(3) Montrer que si A est une matrice normale, alors $\|\!|A|\!\|_2 = \rho(A)$, où $\rho(\,\cdot\,)$ désigne le rayon spectral.

(4) Montrer que $\|\!|A|\!\|_2 = \sqrt{\|\!|A^*A|\!\|_2}$.

(5) Montrer que
$$|||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)} = |||A^*|||_2.$$

(6) *Conditionnement associé à la norme 2.* On suppose A inversible et on note $\mathrm{cond}_2(A) = |||A|||_2|||A^{-1}|||_2$ le conditionnement associé à la norme 2. On considère les racines carrées ordonnées des valeurs propres de A^*A, i.e. les *valeurs singulières* de A : $0 < \mu_1(A) \leq \ldots \leq \mu_n(A)$.

  (a) Montrer que $\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{\mu_n(A)}{\mu_1(A)}$.

  (b) On suppose de plus que A est une matrice normale et on note $\sigma(A)$ son spectre. Montrer que $\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{\max\limits_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|}{\min\limits_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|}$.

Exercice 4. *(Équivalence des normes et des conditionnements)*

(1) Montrer que si deux normes vectorielles $\|\cdot\|_*$ et $\|\cdot\|_\#$ vérifient $C_1\|\cdot\|_* \leq \|\cdot\|_\# \leq C_2\|\cdot\|_*$ pour un couple (C_1, C_2) de réels strictement positifs alors les normes subordonnées vérifient
$$\frac{C_1}{C_2}|||\cdot|||_* \leq |||\cdot|||_\# \leq \frac{C_2}{C_1}|||\cdot|||_*.$$

(2) En utilisant les formules démontrées aux exercices précédents, montrer les relations suivantes pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Quand c'est possible, donner les inégalités associées pour les conditionnements.

  (a) $|||A|||_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\,|||A|||_2$.

  (b) $\max\limits_{1\leq i,j\leq n} |A_{i,j}| \leq |||A|||_2 \leq n\left(\max\limits_{1\leq i,j\leq n} |A_{i,j}|\right)$.

  (c) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}|||A|||_\infty \leq |||A|||_2 \leq \sqrt{n}\,|||A|||_\infty$.

  (d) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}|||A|||_1 \leq |||A|||_2 \leq \sqrt{n}\,|||A|||_1$.

  (e) $|||A|||_2 \leq \sqrt{|||A|||_\infty|||A|||_1}$.

  (f) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}|||A|||_p \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\,|||A|||_p$ pour $p = 1$ et $p = \infty$.

Exercice 5. *(Norme et inversibilité)* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible, $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$ et $|||\cdot|||$ la norme subordonnée associée.

(1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $\|Ax\| \geq \dfrac{\|x\|}{|||A^{-1}|||}$.

(2) Soit $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $|||E||| < \dfrac{1}{|||A^{-1}|||}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,
$$\|Ax + Ex\| \geq \left(\frac{1}{|||A^{-1}|||} - |||E|||\right)\|x\|.$$
En déduire que $A + E$ est inversible.

(3) Comment s'énonce le résultat qu'on vient de montrer si $A = I_n$?

Exercice 6. *(Interprétations du conditionnement)* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible.

(1) (a) Soit $b \in \mathbb{K}^n$ non nul et $\Delta b \in \mathbb{K}^n$. Soit $x, \Delta x \in \mathbb{K}^n$ définis par $Ax = b$ et $A(x+\Delta x) = b+\Delta b$. Étant donné une norme $|||\cdot|||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on rappelle que le conditionnement de A est défini par $\mathrm{cond}(A) = |||A|||\,|||A^{-1}|||$. Montrer que
$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{cond}(A)\,\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

  (b) Déterminer deux vecteurs b et Δb tels qu'on ait égalité entre les deux membres de l'inégalité précédente.

(c) Montrer de même que si $Ax = b$ et $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$, alors

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \;\leq\; \mathrm{cond}(A)\, \frac{\|\!|\Delta A|\!\|}{\|\!|A|\!\|},$$

puis que l'on peut trouver un vecteur b non nul, une matrice ΔA et un vecteur Δx vérifiant les relations ci-dessus et tels qu'on ait égalité entre les deux membres de l'inégalité précédente.

(2) (a) Montrer (en utilisant les résultats de l'exercice précédent) que pour toute matrice singulière B, on a

$$\frac{1}{\mathrm{cond}(A)} \leq \frac{\|\!|A - B|\!\|}{\|\!|A|\!\|}.$$

(b) Soit $u \in \mathbb{K}^n$ tel que $\|u\|_2 = 1$ et $\|A^{-1}u\|_2 = \|\!|A^{-1}|\!\|_2$. On pose $B_0 = A - \dfrac{u(A^{-1}u)^*}{\|\!|A^{-1}|\!\|_2^2}$.

Montrer que $\|\!|A - B_0|\!\|_2 = \dfrac{1}{\|\!|A^{-1}|\!\|_2}$ et en déduire que

$$\frac{1}{\mathrm{cond}_2(A)} = \min\left\{ \frac{\|\!|A - B|\!\|_2}{\|\!|A|\!\|_2} \;\middle|\; B \text{ singulière} \right\}.$$

Autrement dit, plus une matrice est mal conditionnée, plus elle est proche d'être singulière donc difficile à inverser numériquement, et réciproquement.

(3) *(Application : estimation du conditionnement)* On note pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + \varepsilon \end{pmatrix}.$$

(a) Résoudre le système $A_\varepsilon x = b$ pour $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ puis pour $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 + \varepsilon \end{pmatrix}$

(b) Donner à l'aide de la question (1) un minorant de $\mathrm{cond}_1(A_\varepsilon)$ et comparer à sa valeur exacte.