Université Lyon I
Département de Mathématiques

Année universitaire 2023-2024
L3 Mathématiques générales et applications
Algèbre linéaire et bilinéaire, analyse matricielle

FEUILLE D'EXERCICES 6 : DÉCOMPOSITIONS DE MATRICES

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On va démontrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

(i) Il existe une matrice unitaire U et une triangulaire supérieure T telles que $A = U\,T\,U^t$.

(ii) Le spectre de $A\overline{A}$ est inclus dans $\mathbb{R}^+$.

(1) Montrer que $(i) \Rightarrow (ii)$.

(2) Supposons que $\lambda \in \mathbb{R}^+$ est une valeur propre de $A\overline{A}$. Soit $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé et $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $\alpha^2 = \lambda$. On pose $Y = A\overline{X} + \alpha X$. Montrer que $A\overline{Y} = \alpha Y$.

(3) Montrer que $(ii) \Rightarrow (i)$ par récurrence sur la taille des matrices.

Exercice 2. *(Condition nécessaire et suffisante pour une décomposition LU sans permutation)*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Un résultat de cours indique que si tous les mineurs principaux de A sont non nuls, i.e.

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \qquad \det((a_{ij})_{1\leq i,j\leq k}) \neq 0$$

alors A admet une unique décomposition LU avec L triangulaire inférieure à diagonale unité et U triangulaire supérieure (décomposition LU sans permutation). Montrer qu'il s'agit d'une équivalence.

Exercice 3. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 11 & 7 \\ 1 & 7 & 14 & 13 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer la factorisation LU de A.

(2) En déduire $\det(A)$.

(3) Résoudre à l'aide de la factorisation LU de A le système $Ax = b$ pour les choix suivants de $b \in \mathbb{R}^4$.

(i) $b = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$; (ii) $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; (iii) $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; (iv) $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. *(Factorisation de Cholesky)*

(1) Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 7 \\ 2 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$

est symétrique et définie positive.

(2) Calculer la factorisation de Cholesky de A.

(3) Résoudre $Ax = b$ avec $b = (0, 0, 96)^t$ en utilisant la deuxième question.

Exercice 5. *(Décomposition LU et largeur de bande)*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle largeur de bande de la matrice C la quantité

$$q_C = \max\{|i-j|,\ 1 \leq i,j \leq n,\ c_{i,j} \neq 0\}$$

Montrer que si C admet une décomposition LU sans permutation alors les largeurs de bande q_L et q_U de L et U vérifient $\max\{q_L,\ q_U\} \leq q_C$.

Exercice 6. *(Décomposition de Cholesky)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés par

$$(A_n)_{i,j} = \min(i,j).$$

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\det(A_n) = 1$.
(2) Échelonner les matrices A_2 et A_3. Montrer que ces matrices sont définies positives et donner leur décomposition de Cholesky.
(3) Montrer que A_n est définie positive et déterminer sa décomposition de Cholesky.

Exercice 7. *(Décomposition QR par la méthode de Householder)*
On s'intéresse à la décomposition QR d'une matrice réelle par l'algorithme de Householder qui utilise une succession de multiplications par des matrices orthogonales.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans la suite, les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sont identifiés à des vecteurs colonnes et $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique. Ainsi, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\|^2 = u^t u$.

(1) À tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ on associe la matrice de Householder définie par

$$H(u) = \begin{cases} \mathrm{I}_n - 2\dfrac{uu^t}{\|u\|^2} & \text{si } u \neq 0 \\ \mathrm{I}_n & \text{sinon} \end{cases}.$$

   (a) Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $H(u)$ est symétrique et othogonale.
   $H(u)$ est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à u.
   (b) Soit e un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$.
   Montrer que, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, si v et e ne sont pas colinéaires, alors

$$H(v + \|v\|e)\, v = -\|v\|\, e \qquad \text{et} \qquad H(v - \|v\|e)\, v = \|v\|\, e.$$

(2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Déterminer une matrice de Householder H telle que la matrice HA n'ait que des zéros sous la diagonale dans sa première colonne.
   (b) Construire une suite de matrices de Householder $(H^{(k)})_{1 \leq k \leq n-1}$ et une suite de matrices $(A^{(k)})_{0 \leq k \leq n-1}$ telles que
      (i) $A^{(0)} = A$;
      (ii) pour tout $0 \leq k \leq n-2$, $A^{(k+1)} = H^{(k+1)} A^{(k)}$;
      (iii) $A^{(n-1)}$ est triangulaire.
   (c) Montrer que l'algorithme précédent fournit une décomposition QR et que le nombre N_{op} de multiplications nécessaires à sa mise en œuvre vérifie $N_{op} \sim \dfrac{2n^3}{3}$.

(3) Application : déterminer une factorisation QR de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$