Université Lyon I
Département de Mathématiques

Année universitaire 2023-2024
L3 Mathématiques générales et applications
Algèbre linéaire et bilinéaire, analyse matricielle

FEUILLE D'EXERCICES 5 : ESPACES HERMITIENS

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, dire si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire hermitien sur l'espace vectoriel complexe E. Si c'est le cas, préciser la norme associée.

(1) dans $E = \mathbb{C}_n[X]$ ($n \in \mathbb{N}^*$), pour tout $P, Q \in E$,

(a) $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(x)Q(x)\,dx$

(b) $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 \overline{P(x)}Q(x)\,dx$

(c) $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$

(d) $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \overline{P(k)}Q(k)$

(2) dans $E = M_n(\mathbb{C})$ ($n \in \mathbb{N}^*$), pour tout $A, B \in E$,

(a) $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^t B)$

(b) $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^* B)$

Exercice 2. On munit $\mathbb{C}^3$ de son produit scalaire hermitien canonique. On note

$$F = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid x_1 - x_2 + ix_3 = 0\}$$

(1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$ et déterminer sa dimension.
(2) Calculer une base orthonormale de F.
(3) Déterminer l'orthogonal de F.
(4) On note $p_F \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ la projection orthogonale sur F. Déterminer la matrice de p_F dans la base canonique.

Exercice 3. Sur $E = \mathbb{C}_n[X]$ ($n \in \mathbb{N}^*$), on définit pour tout $P, Q \in E$,

$$\langle P, Q\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{P(e^{it})}Q(e^{it})\,dt$$

(1) Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire hermitien sur E.
(2) Montrer que la base $(1, X, \dots, X^n)$ est orthonormée pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
(3) Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in E$, exprimer $\|P\|$ en fonction des coefficients $(a_0, \dots, a_n)$.

Exercice 4. On considère l'application $q \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ définie dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ par : pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$,

$$q(x) = |x_1|^2 + 5|x_2|^2 + 3|x_3|^2 + ix_1\overline{x_2} - i\overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_3} + \overline{x_1}x_3 - 3ix_2\overline{x_3} + 3i\overline{x_2}x_3$$

(1) Montrer qu'il existe une forme hermitienne (c'est-à-dire une forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne) $f \colon \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{C}^3$, $f(x, x) = q(x)$.
(2) Calculer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$.
(3) Montrer que q est définie positive en utilisant la méthode de Gauss.
(4) Déterminer une base de $\mathbb{C}^3$ orthonormée pour f.

Exercice 5. Soit E un espace hermitien de dimension $n \geq 1$ muni d'un produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$. On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$, $\langle f(x), x \rangle = 0$.

(1) Montrer que pour tout $x, y \in E$, $\langle f(x), y \rangle = 0$.
Indication. On pourra développer $\langle f(x+y), x+y \rangle$ et $\langle f(x+iy), x+iy \rangle$.

(2) Que peut-on en déduire sur f ?

(3) Le résultat est-il encore valide dans le cas d'un espace euclidien ?

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid M^* = M\}$ l'ensemble des matrices hermitiennes de taille n.

(1) Dans cette question, on considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. L'ensemble H est-il un sous-espace vectoriel complexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

(2) Dans cette question, on considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   (a) Quelle est la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
   (b) Montrer que H est un sous-espace vectoriel réel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Quelle est sa dimension ?
   (c) On note $A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid M^* = -M\}$ l'ensemble des matrices antihermitiennes de taille n. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = H \oplus A$.

Exercice 7. Soit E un espace hermitien de dimension $n \geq 1$ muni d'un produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u.

(1) On suppose que $f^* = f^{-1}$. Montrer que $|\lambda| = 1$.

(2) On suppose que $f^* = f$. Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$.

(3) On suppose que $f^* = -f$. Montrer que $\lambda \in i\mathbb{R}$.

Exercice 8. Soit E un espace hermitien de dimension $n \geq 1$ muni d'un produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

(1) Montrer que $(\operatorname{Im} u)^\perp = \operatorname{Ker}(u^*)$.

(2) On suppose de plus que u est un endomorphisme normal. Montrer que $(\operatorname{Im} u)^\perp = \operatorname{Ker}(u)$.

Exercice 9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 1$ une matrice antisymétrique.

(1) Montrer que $B = iA$ est hermitienne ; en déduire que toutes les valeurs propres de A sont imaginaires pures.

(2) Montrer que le rang de A est pair.

Exercice 10 (Racine carrée et décomposition polaire)**.**
On considère $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire hermitien canonique.

(1) *Racine carrée.* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne et définie positive, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ non nul, $\langle x, Ax \rangle > 0$.
Montrer qu'il existe une unique matrice hermitienne et définie positive H telle que $A = H^2$. *On dit que H est la racine carrée positive de A.*

(2) *Décomposition polaire.* Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible.
   (a) Justifier que M^*M est hermitien et défini positif. On note H sa racine carrée positive.
   (b) On pose $U = MH^{-1}$. Montrer que U est matrice unitaire.
   (c) En déduire que M s'écrit de manière unique sous la forme
$$M = HU \quad \text{avec } U \text{ unitaire et } H \text{ hermitienne définie positive}$$

(3) Énoncer et démontrer un résultat de décomposition polaire pour les matrices à coefficients réels.