UNIVERSITÉ LYON I
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Année universitaire 2023-2024
L3 Mathématiques générales et applications
Algèbre linéaire et bilinéaire, analyse matricielle

FEUILLE D'EXERCICES 3 :
FORMES BILINÉAIRES, FORMES QUADRATIQUES (II)

Exercice 1. Décomposer en somme de carrés de formes linéaires indépendantes, par la méthode de Gauss, les formes quadratiques suivantes :

(1) $q_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto 2x^2 + y^2 - z^2 + 2xz - 2xy\,;$

(2) $q_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto 2xy - 2yz\,;$

(3) $q_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ (x, y, z, t) \mapsto 3x^2 + 4y^2 - z^2 + 2t^2 + xy + 4yz + tz\,;$

(4) $q_4 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ (x, y, z, t) \mapsto xy + yz + zx - ty + 2tz + 3tx.$

En déduire le rang et la signature de ces formes quadratiques.

Exercice 2. Soit a, b et c des réels non tous nuls et q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Déterminer la signature de q en fonction des valeurs de a, b et c.

Exercice 3. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^3$ définie dans $\mathcal{B}$ par : pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 6yz + 3xy + 2xz.$$

(1) Déterminer la signature de q.

(2) Déterminer une base orthogonale pour q.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3, de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère la forme quadratique f sur E définie par : pour tout $v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in E$,

$$f(v) = x_1^2 + 2x_2^2 + 13x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 10x_2x_3.$$

(1) Déterminer la forme polaire φ de f et préciser la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

(2) Déterminer la signature et le rang de f. La forme f est-elle dégénérée ?

(3) Déterminer une base $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ de E orthogonale pour φ, et préciser l'expression de $f(v)$ dans cette base pour tout $v \in E$.

(4) Déterminer une base du noyau de f et trouver un vecteur $\omega \in E$ isotrope pour f.

Exercice 5. On considère la forme quadratique sur $\mathbb{C}^3$ définie dans la base canonique par :

$$q : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C},\ (x, y, z) \mapsto -x^2 + 2y^2 - z^2 + 2ixy + 2xz + 2(1 - i)yz$$

(1) Déterminer la forme polaire de q et la matrice associée M dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

(2) Montrer que M est congruente à la matrice identité.

(3) Décomposer q en somme de carrés de formes linéaires indépendantes, par la méthode de Gauss.

(4) Déterminer une base orthonormée pour q.

Exercice 6.

(1) Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E. Soit $\varphi\colon E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E.
Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) la restriction de φ à $F \times F$ est non dégénérée ;

(ii) $F \cap F^\perp = \{0\}$;

(iii) $E = F \oplus F^\perp$.

(2) Soit $n \geq 1$. Dans cette question, on considère $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n, et on définit pour tous $P, Q \in E$,

$$\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(-t)dt \quad \text{et} \quad q(P) = \varphi(P,P)$$

(a) Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.

(b) Montrer que φ est non dégénérée.

(c) On note F_0 le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes pairs, et F_1 le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes impairs.

(i) Montrer que q est définie positive sur F_0 et définie négative sur F_1.

(ii) Montrer que $(F_0)^\perp = F_1$ et $(F_1)^\perp = F_0$ (où l'on considère les orthogonaux pour φ).

(iii) Déterminer les dimensions de F_0 et F_1 en fontion de n.

(d) En utilisant la question (c), déterminer la signature de q.

Exercice 7. On considère $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ où :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Soit $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(A,B) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(AB)\right).$$

(a) Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.

(b) Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

(c) Montrer que φ est non dégénérée.

(2) (a) Rappeler pourquoi l'on a : pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$$

(b) Déduire de (a) que la forme quadratique f associée à φ est donnée par : pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$f(A) = \det(A)$$

(c) Déduire de ce qui précède la relation : pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(AB) = \det(A+B) - \det(A) - \det(B)$$

(d) Quel est le cône isotrope de f ?

(e) Déterminer le rang de f, sa signature, et une base orthogonale.

(f) Soit $F = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}$.

(i) Déterminer $F^\perp$, l'orthogonal de F pour φ.

(ii) A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus F^\perp$?

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère u l'endomorphisme de E dont la matrice A dans la base $\mathcal{B}$ est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

et s et t les deux formes bilinéaires sur E définies par leurs matrices respectives S et T dans la base $\mathcal{B}$:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer le rang de s et de t.

(2) Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$,
$$s\big(u(x), y\big) = t(x, y) = s\big(x, u(y)\big),$$

(3) Déterminer les valeurs propres de u et montrer que u est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

(4) Montrer que les vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux pour s et t.

(5) Déterminer une base de E orthogonale à la fois pour s et t.

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère f la forme quadratique définie sur E par : pour tout $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in E$,
$$f(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

(1) Déterminer la forme polaire φ de f et préciser la matrice M de φ dans la base $\mathcal{B}$.

(2) La forme φ est-elle dégénérée ? Quel est son rang ?

(3) Déterminer une base de E orthogonale pour f et préciser l'expression de $f(x)$ dans cette base pour tout $x \in E$.

(4) Déterminer une base de $E^\perp$. En déduire un vecteur de E isotrope pour φ.

(5) Soit $g\colon E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E. On note G sa matrice dans la la base $\mathcal{B}$.
Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $(x, y) \in E^2$,
$$\varphi(x, y) = g\big(u(x), y\big).$$
et exprimer la matrice A de u dans la base $\mathcal{B}$ en fonction des matrices M et G.

Exercice 10 (Groupe orthogonal associé à une forme quadratique)**.**
Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $q\colon E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique non dégénérée sur E et $\varphi\colon E \times E \to \mathbb{R}$ la forme polaire de q.
On s'intéresse dans cet exercice à l'ensemble
$$O(q) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \forall x \in E\ q(u(x)) = q(x)\}$$

(1) Soit $u \in O(q)$.
  (a) Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(u(x), u(y)) = \varphi(x, y)$.
  (b) On note A et Q respectivement les matrices de u et q dans la base $\mathcal{B}$. Écrire une relation satisfaite par A et Q.
  (c) Montrer que le déterminant de u vaut ± 1.

(2) Montrer que $O(q)$ est un groupe. On l'appelle le *groupe orthogonal* de q.

(3) *Deux exemples.*
  (a) Déterminer $O(q)$ où $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto 2xy$.
  (b) Même question pour $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $q(x, y) = x^2 - y^2$.

(4) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = \mathrm{id}$.

(a) En utilisant le lemme des noyaux, montrer que $E = \mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id})$.

(b) Montrer que $u \in O(q)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id})$ sont orthogonaux pour φ.

(c) On suppose que $u \in O(q)$. Montrer que $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}) = (\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id}))^{\perp}$ et $\mathrm{Im}\,(u + \mathrm{id}) = (\mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{id}))^{\perp}$ (l'orthogonal pour φ).

(d) On suppose que $u \in O(q)$. Montrer les décompositions suivantes :

— $E = \mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id})$
— $E = \mathrm{Im}\,(u + \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{id})$
— $E = \mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}\,(u + \mathrm{id})$