Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2021-2022
Analyse matricielle – L3

Session de rattrapage

Les documents, calculatrices et ordinateurs ne sont pas autorisés.

Le sujet est constitué de trois exercices indépendants.

Chaque réponse doit être accompagnée d'une explication sur la démarche qui a permis de l'obtenir.

Exercice 1

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Quelle condition vérifiée par A permet de garantir l'existence d'une décomposition LU ?
2. Calculer la décomposition LU de A.
3. Utiliser cette décomposition LU pour résoudre le système $AX = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ où $X \in \mathbb{C}^4$.

Exercice 2

Calculer la décomposition QR de la matrice ci-dessous, en précisant pourquoi elle admet une telle décomposition.

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ -6 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

On note $\| \cdot \|_2$ la norme hermitienne usuelle, c'est-à-dire, $\|x\|_2 = \sqrt{x^* x}$.

1. Rappeler la définition de la norme de M subordonnée à la norme $\| \cdot \|_2$, notée $|||M|||_2$.
2. On rappelle que $\|Ux\|_2 = \|U^* x\|_2 = \|x\|_2$ pour toute matrice unitaire U. En déduire que, d'une part, $|||UM|||_2 = |||M|||_2$ lorsque U est unitaire, et d'autre part, $|||MV^*|||_2 = |||M|||_2$ lorsque V est unitaire.
3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée complexe, $M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$. On note U la matrice diagonale ci-dessous,

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Calculer la nouvelle matrice N construite à partir de M et U par la formule suivante,

$$N = \frac{1}{2}(M + U^* M U)$$

4. En déduire que le résultat suivant : si on note $D(M) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ la matrice formée des éléments diagonaux de M, alors

$$|||D(M)|||_2 \leq |||M|||_2$$

5. Le but de cette ultime question est de démontrer le même résultat pour une matrice quelconque $M \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{C})$. Pour cela, on adapte les définitions :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix} \quad , \quad N = \frac{1}{3}\left(M + U^* M U + (U^*)^2 M U^2\right)$$

où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est une racine cubique de l'unité. En déduire l'inégalité $|||D(M)|||_2 \leq |||M|||_2$ où $D(M)$ désigne la matrice diagonale constituée des éléments diagonaux de M.