Université Claude Bernard Lyon 1 — Algèbre Linéaire et Bilinéaire, Analyse Matricielle
Semestre d'automne 2022-23 — L3 MGA

Examen de rattrapage – Durée 90 min – mercredi 28 juin 2023

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
Les **réponses mal justifiées** ne permettront pas d'obtenir tous les points.
L'énoncé comporte 4 exercices.

Exercice 1. Questions de cours

1. Montrez qu'une forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$ est toujours de la forme $q(X) = X^T AX$, pour une matrice symétrique A unique.
2. Donnez un exemple de matrice symétrique complexe non diagonalisable.
3. Etant donnée une matrice symétrique complexe A, quel théorème et quelle méthode permet de trouver M, une matrice complexe inversible, telle que $M^T AM = I$?

Exercice 2.

On considère la forme quadratique suivante sur $\mathbb{R}^4$:

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_4^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 4x_3x_4 \,.$$

1. Déterminer la matrice symétrique A associée à q définie ci-dessus.
2. Trouver une base l_1, l_2, l_3, l_4 de $(\mathbb{R}^4)^*$ et des coefficients réels a_1, a_2, a_3, a_4 tels que
$$q = a_1 l_1^2 + a_2 l_2^2 + a_3 l_3^2 + a_4 l_4^2 \,.$$
3. En déduire la signature de q et que q est non dégénérée.
4. Trouver la base antéduale (v_1, v_2, v_3, v_4) de la base (l_1, l_2, l_3, l_4) choisie ci-avant.
5. Quelle est la matrice N de q dans cette base (v_1, v_2, v_3, v_4) ?

Exercice 3.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que A est symétrique définie positive.
2) Calculer la décomposition LU de la matrice A.
3) En déduire la décomposition de Choleski de A.

Exercice 4.

1) Montrer qu'une application linéaire P d'un espace euclidien dans lui même est un projecteur orthogonal si et seulement elle vérifie $P^* = P^2 = P$.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on munit $\mathbb{R}^m$ de son produit scalaire canonique et de la norme associée. Soient $n \geq k$ des entiers et $A \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ de rang k. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ fixé.

2) Montrer que la quantité $d_x = \inf_{u \in \mathrm{Im} A} ||x - u||$ est atteinte en un point unique que l'on précisera

3) Montrer que $A^T A$ est inversible.

4) Montrer que $P = A\,(A^T A)^{-1}\,A^T$ est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im} A$.

5) Montrer que

$$\inf_{u \in \mathrm{Im} A} ||x - u|| = \Big(||x||^2 - \big\langle\, A\,(A^T A)^{-1}\,A^T\,x\,,\,x\,\big\rangle \Big)^{1/2}\,.$$