Université Lyon I
Département de Mathématiques

Année universitaire 2023-2024
L3 Mathématiques générales et applications
Algèbre linéaire et bilinéaire, analyse matricielle

CONTRÔLE PARTIEL
MARDI 7 NOVEMBRE 2023 – DURÉE : 1 H 30

Aucun document n'est autorisé.
Aucun appareil électronique (en particulier un téléphone ou une calculatrice) n'est autorisé.

Les réponses devront être rédigées et argumentées clairement et soigneusement.
Le sujet comporte quatre exercices indépendants.

Exercice 1. *Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.*
n désigne un entier ≥ 1.

(1) (Question de cours) On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire hermitien canonique sur $\mathbb{C}^n$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne. Montrer que ses valeurs propres sont réelles.

(2) On considère l'application φ sur $\mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ qui à $P = \sum_{k=0}^n p_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^n q_k X^k$ associe
$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} \overline{p_k} q_k$$
Montrer que φ est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}_n[X]$.

(3) On considère la forme quadratique $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto xy - yz + xz$.
   (a) Écrire la forme q comme la somme de carrés de formes linéaires indépendantes en utilisant la réduction de Gauss.
   (b) En déduire la signature et le rang de q.

Exercice 2. On note $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E. On définit sur E la forme quadratique q par son expression dans la base canonique :
$$\text{pour tout } x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in E, \qquad q(x) = (x_1 + x_2 - 3x_3)^2 + 2(x_2 + x_3)^2 + 4x_3^2$$
On note $f\colon E \times E \to \mathbb{R}$ la forme polaire de q.
On définit les formes linéaires $\ell_1\colon E \to \mathbb{R}$, $\ell_2\colon E \to \mathbb{R}$ et $\ell_3\colon E \to \mathbb{R}$ par :
$$\text{pour tout } x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3,\ \ \ell_1(x) = x_1 + x_2 - 3x_3, \quad \ell_2(x) = x_2 + x_3, \ \text{ et } \quad \ell_3(x) = x_3$$

(1) Montrer que (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est une base de E^*.

(2) Déterminer une base $\mathcal{B}_a = (a_1, a_2, a_3)$ de E orthogonale pour f.

(3) Déterminer la matrice A de f relativement à la base $\mathcal{B}_a$ de E.

(4) On note B la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}_e$ de E. Déterminer une matrice P telle que $B = P^tAP$. En déduire la matrice B.

Exercice 3. On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire canonique. On définit

$$H = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

(1) Déterminer l'orthogonal de H.

(2) Soit $x \in \mathbb{R}^4$, donner une expression explicite de la distance $d(x, H)$ de x à H.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n. Pour tout $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on définit la forme quadratique

$$q_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \langle x, Ax \rangle$$

et la forme bilinéaire

$$\varphi_A \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \langle x, Ay \rangle$$

(1) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que φ_A est la forme polaire associée à q_A.

(2) Soit $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A = B$ si et seulement si $q_A = q_B$.

(3) Dans la suite de l'exercice, on fixe A, B deux matrices symétriques. On suppose que les valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de A sont toutes strictement positives.

   (a) Justifier qu'il existe une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ orthonormée pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et telle que pour tout $k = 1, \dots, n$, $Av_k = \lambda_k v_k$.

   (b) Montrer que la base $\mathcal{B}$ est orthogonale pour φ_A. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$ orthonormée pour φ_A et constituée de vecteurs propres de A.

   (c) En déduire qu'il existe une matrice Q inversible telle que $Q^t A Q = I_n$.

   (d) Montrer qu'il existe une matrice D diagonale et une matrice U orthogonale telles que $Q^t B Q = U D U^t$.

   (e) On note $P = U^t Q^{-1}$. Montrer que

$$A = P^t P \quad \text{et} \quad B = P^t D P$$

   (f) En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ qui est à la fois orthonormée pour φ_A et orthogonale pour φ_B.