L3 Algèbre linéaire et bilinéaire, analyse matricielle

Contrôle partiel, 7/11/23, corrigé

Exercice 1

(1) Soit x un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. On a :

$$\langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \bar{\lambda}\|x\|^2$$

Or A est hermitienne donc $\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle$

$$= \langle x, \lambda x\rangle = \lambda\|x\|^2$$

Donc $\lambda\|x\|^2 = \bar{\lambda}\|x\|^2$

Comme $x \neq 0$ on a $\lambda = \bar{\lambda}$ donc $\lambda \in \mathbb{R}$

D'où $\operatorname{sp} A \subset \mathbb{R}$

(2) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{n} q_k X^k$, $R = \sum_{k=0}^{n} r_k X^k$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} \bar{p}_k q_k \in \mathbb{C}$$

$$\varphi(\lambda P, Q) = \varphi\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda p_k X^k, \sum_{k=0}^{n} q_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\lambda p_k} q_k = \bar{\lambda}\sum_{k=0}^{n} \bar{p}_k q_k = \bar{\lambda}\varphi(P,Q)$$

$$\varphi(P+Q, R) = \varphi\left(\sum_{k=0}^{n}(p_k+q_k)X^k, \sum_{k=0}^{n} r_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{n}\overline{(p_k+q_k)}\,r_k = \sum_{k=0}^{n}\bar{p}_k r_k + \sum \bar{q}_k r_k = \varphi(P,R) + \varphi(Q,R)$$

$$\varphi(Q,P) = \sum_{k=0}^{n} \bar{q}_k p_k = \overline{\sum_{k=0}^{n} \bar{p}_k q_k} = \overline{\varphi(P,Q)}$$

$$\varphi(P,P) = \sum_{k=0}^{n} \bar{p}_k p_k = \sum_{k=0}^{n} |p_k|^2 \in \mathbb{R}^+$$

$\varphi(P,P) = 0 \Rightarrow \forall k = 0, \dots, n \quad p_k = 0$ (car $\varphi(P,P)$ est une somme de termes réels positifs) d'où $P = 0$. On en déduit que φ est définie positive.

φ est à valeurs dans $\mathbb{C}$, antilinéaire à gauche, à symétrie hermitienne, donc linéaire à droite, et φ est définie positive. φ est donc un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}_n[X]$.

(3) (a) $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} q(x,y,z) &= xy - yz + xz \\ &= (x-z)(y+z) + z^2 \\ &= \frac{1}{4}\left[(x+y-z+z)^2 - (x-z-y-z)^2\right] + z^2 \\ &= \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y-2z)^2 + z^2 \end{aligned}$$

Par construction les formes linéaires apparaissant dans les carrés sont indépendantes.

(b) Par le théorème de Sylvester

signature$(q) = (2,1)$

rang$(q) = 2 + 1 = 3$

Exercice 2

(1) On considère la matrice dont les lignes sont les coordonnées de ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 dans la base duale canonique

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det M = 1$ donc M est inversible.

On en déduit que (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est une base de E^*

(2) Soit (a_1, a_2, a_3) la base antéduale de (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3)

D'après un résultat de cours les colonnes de M^{-1}

sont les coordonnées de (a_1, a_2, a_3) dans la base canonique de E.

En effet l'égalité $MM^{-1} = I_3$ équivaut à $\ell_i(a_j) = \delta_i^j \quad \forall i,j$

On calcule M^{-1} et on trouve

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $a_1 = (1,0,0)$, $a_2 = (-1,1,0)$, $a_3 = (4,-1,1)$

D'après le cours (a_1, a_2, a_3) est une base de E orthogonale pour f.

Si on a oublié pourquoi c'est vrai, c'est facile à vérifier. La forme polaire f de q est définie par

$\forall x,y \in \mathbb{R}^3 \quad f(x,y) = \ell_1(x)\ell_1(y) + 2\ell_2(x)\ell_2(y) + 4\ell_3(x)\ell_3(y)$

donc $\forall i,j \in \{1,2,3\}$

$$f(a_i, a_j) = \sum_{k=1}^{3} \ell_k(a_i)\ell_k(a_j) = 0 \text{ si } i \neq j$$

(3) D'après ce qui précède 5

$$Mat_{\mathcal{B}_a}(f) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

puisque $f(a_i, a_j) = 0$ si $i \neq j$

$$f(a_1,a_1) = (l_1(a_1))^2 = 1$$
$$f(a_2,a_2) = 2(l_2(a_2))^2 = 2$$
$$f(a_3,a_3) = 4(l_3(a_3))^2 = 4$$

(4) Soit $B = Mat_{\mathcal{B}_e}(f)$

En posant $P = Mat_{\mathcal{B}_a,\mathcal{B}_e}(id)$ (la matrice de passage de $\mathcal{B}_a$ à $\mathcal{B}_e$)

on a $B = P^t A P$

Déterminons P.

On remarque que 6

$$M^{-1} = Mat_{\mathcal{B}_e,\mathcal{B}_a}(id) \quad (\text{cf } (2))$$

donc $P = Mat_{\mathcal{B}_a,\mathcal{B}_e}(id) = M = \begin{pmatrix}1&1&-3\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

Puis on calcule

$$B = P^t A P = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\-3&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-3\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}1&1&-3\\1&3&-1\\-3&-1&15\end{pmatrix}$$

Exercice 3 7

(1) $H = \{x = (x_1,x_2,x_3,x_4),\ \langle (x_1,x_2,x_3,x_4),(1,1,1,1)\rangle = 0\}$

donc $H^\perp = Vect(1,1,1,1)$

(2) On a $\mathbb{R}^4 = H \oplus H^\perp$

On note p_H (resp $p_{H^\perp}$) la projection orthogonale sur H (resp. $H^\perp$). On a pour tout x de $\mathbb{R}^4$

$$x = p_H(x) + x - p_H(x) = p_H(x) + p_{H^\perp}(x)$$

Or $d(x,H) = \|x - p_H(x)\|$ donc $d(x,H) = \|p_{H^\perp}(x)\|$

Soit $n = \frac{(1,1,1,1)}{\|(1,1,1,1)\|} = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$ n est unitaire et $H^\perp = Vect(n)$

$p_{H^\perp}(x) = \langle x,n\rangle n$ donc $\|p_{H^\perp}(x)\| = |\langle x,n\rangle|$

$= \frac{1}{2}|x_1+x_2+x_3+x_4|$

Exercice 4 8

(1) φ_A est bilinéaire car A est linéaire et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bilinéaire

φ_A est symétrique car A est symétrique

donc $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$ $\varphi_A(y,x) = \langle y, Ax\rangle = \langle Ay, x\rangle = \langle x, Ay\rangle$

$= \varphi_A(x,y)$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\varphi_A(x,x) = q_A(x)$

Or la forme polaire de q_A est l'unique forme bilinéaire symétrique qui en tout $(x,x) \in (\mathbb{R}^n)^2$ prend la même valeur que $q_A(x)$. On en déduit que c'est φ_A

(2) Si $A = B$ alors

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ $q_A(x) = \langle x, Ax\rangle = \langle x, Bx\rangle = q_B(x)$

donc $q_A = q_B$

Réciproquement, si $q_A = q_B$ alors $\varphi_A = \varphi_B$ par unicité de la forme polaire.

Donc $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$ $\langle x, Ay\rangle = \langle x, By\rangle$

9

En particulier, $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$
$\langle e_i, Ae_j\rangle = \langle e_i, Be_j\rangle$ donc $A_{ij} = B_{ij}$
D'où $A = B$

(3) (a) A est symétrique donc, par le théorème de diagonalisation des endomorphismes auto-adjoints, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ composée de vecteurs propres de A, i.e $\forall k\ \exists v_k\ \ Av_k = \lambda_k v_k$

(b) $\forall k,l = 1,\dots,n$

$$\varphi_A(v_k, v_l) = \langle v_k, Av_l\rangle = \langle v_k, \lambda_l v_l\rangle$$
$$= \lambda_l \langle v_k, v_l\rangle = 0 \text{ si } k \neq l$$

car $\mathcal{B}$ est orthonormée,
Il s'ensuit que $\mathcal{B}$ est orthogonale pour φ_A
Par hypothèse, les valeurs propres de A sont strictement positives.

10

Posons pour tout $k = 1,\dots,n$ $\quad u_k = \dfrac{v_k}{\sqrt{\lambda_k}}$

- $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ puisque $\mathcal{B}$ en est une
- Les u_k sont des vecteurs propres de A puisque
$$Au_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} A v_k = \sqrt{\lambda_k}\, v_k = \lambda_k u_k$$
- Les u_k sont unitaires pour φ_A puisque
$$\varphi_A(u_k, u_k) = q_A(u_k) = \frac{1}{\lambda_k} q_A(v_k) = 1$$
- Les u_k sont deux à deux φ_A-orthogonaux puisque
$$\forall k,l \quad \varphi_A(u_k, u_l) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k \lambda_l}} \varphi_A(v_k, v_l)$$

donc $\varphi_A(u_k, u_l) = 0$ si $k \neq l$ car $\mathcal{B}$ est φ_A-orthogonale

11

On conclut que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^n$ orthonormée pour φ_A et constituée de vecteurs propres de A.

(c) Par définition de $\mathcal{B}'$, la matrice de φ_A dans $\mathcal{B}'$ est

$$\left(\varphi_A(u_k, u_l)\right)_{k,l} = I_n$$

Par la formule de changement de base pour les matrices d'applications bilinéaires on a

$$Q^t A Q = I_n$$

avec $Q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix}$

12

(d) On remarque que

$$(Q^t B Q)^t = Q^t B^t (Q^t)^t = Q^t B Q$$
car B est symétrique

donc $Q^t B Q$ est symétrique.

Par le théorème de diagonalisation des endomorphismes auto-adjoints, il existe D diagonale et $U \in O_n(\mathbb{R})$ telles que

$$Q^t B Q = U D U^t$$

(e) Soit $P = U^t Q^{-1}$

On a $\quad P^t P = (Q^{-1})^t \underbrace{U U^t}_{I_n} Q^{-1} = (Q^t)^{-1} Q^{-1}$

car $(Q^{-1})^t = (Q^t)^{-1}$

Or $Q^t A Q = I_n$ donc $A = (Q^t)^{-1} Q^{-1}$ 13

d'où $P^t P = A$

On calcule ensuite

$$P^t D P = (Q^{-1})^t U D U^t Q^{-1} = (Q^{-1})^t Q^t B \underbrace{Q Q^{-1}}_{I_n}$$

$$= (Q^t)^{-1} Q^t B = B$$

(f) On a $A = P^t I_n P$ et $B = P^t D P$

P est inversible car U et Q le sont
donc P est une matrice de changement de base
A et B sont, respectivement, les matrices de
φ_A et φ_B dans la base canonique

Par la formule de changement de base pour 14
les applications bilinéaires, on en déduit qu'il
existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle :

- la matrice de φ_A est I_n
(donc la base est φ_A-orthonormée)
- la matrice de φ_B est D
(donc la base est φ_B-orthogonale)