CCF 2022
Lundi 23 Mai 2022
Durée 2h

Aucun document ni calculatrice n'est autorisé durant l'examen

Exercice 1 *(4 pts)*

On rappelle le critère de Sylvester : une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si tous ses déterminants principaux sont strictement positifs.

Soit $n \geqslant 1$ un entier. On considère la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ suivante

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et on note D_n son déterminant.

1) a) Calculer D_1 et D_2.
   b) Montrer que $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$ pour $n \geqslant 3$.

2) a) En déduire que la suite (D_n) est croissante.
   b) En déduire que $D_n > 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

3) Montrer que A admet une décomposition de Cholesky et donner cette décomposition (vous devez expliquer votre démarche et prouver la validité de votre décomposition pour tout n).

Exercice 2 *(6 pts)*

On considère la matrice B et le vecteur b suivants :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

1) Déterminer l'ensemble des solutions exactes du système $Bx = b$.

2) Montrer à l'aide de l'équation normale que le système $Bx = b$ admet une unique solution au sens des moindres carrés. Calculer cette solution.

3) a) Calculer la décomposition en valeurs singulières de B
   b) Calculer le pseudo-inverse de B et montrer qu'il permet de retrouver la solution calculée à la question 2

4) Montrer que le vecteur

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 17 \\ 16 \\ 13 \end{pmatrix}$$

est le projeté orthogonal de b sur $\operatorname{Im} B$.

5) Comment retrouve-t-on ainsi la solution des moindres carrés ?

Exercice 3 *(6 pts)*

Soit la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

1) Montrer que C est diagonalisable.

2) Diagonaliser C avec une matrice de passage orthogonale.

3) En déduire sans calcul la décomposition en valeurs singulières de C.

4) Justifier que C admet une décomposition QR et en calculer une.

5) En déduire sans calcul la factorisation de Cholesky de C^*C.

Exercice 4 *(4 pts)*

Soient $m < n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice de rang m. On considère sa décomposition en valeurs singulières

$$A = V\,D\,U^* .$$

1) a) Montrer que DD^* est inversible.
   b) Montrer que $D^\dagger = D^*(DD^*)^{-1}$.

2) a) Montrer que AA^* est inversible.
   b) Montrer que $A^\dagger = A^*(AA^*)^{-1}$.

3) On considère maintenant $B \in M_n(\mathbb{R})$ quelconque. Montrer, en utilisant la décomposition en valeurs singulières, que B peut être décomposée en

$$B = S\,Q\,,$$

où S est symétrique réelle positive et où Q est orthogonale.