Université Claude Bernard-Lyon 1 Semestre de printemps 2020-2021

Analyse matricielle – L3

Examen, jeudi 20 mai 2021

Durée : deux heures

L'usage des notes de cours/TD et de la calculatrice est interdit.

Il sera tenu compte de la rédaction. Les arguments et les raisonnements devront être clairement détaillés. Les résultats du cours utilisés devront être explicitement cités.

Exercice 1. *Convergence de suites itératives.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère, pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $x_1 \in \mathbb{R}^n$, la suite définie par $x_{k+1} = Ax_k + Bx_{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note y_k le vecteur de $\mathbb{R}^{2n}$ défini par $y_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice $C \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $y_{k+1} = Cy_k$. On pourra écrire C sous la forme d'une matrice par blocs.
2. Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $0 \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $0 \in \mathbb{R}^{2n}$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante (portant sur C) pour que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $0 \in \mathbb{R}^n$ pour tous x_0 et x_1.

Exercice 2. *Méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel*

Pour tout paramètre réel α, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire les matrices d'itération $\mathcal{L}_J$ de la méthode de Jacobi et $\mathcal{L}_{GS}$ de la méthode de Gauss-Seidel.
2. Montrer que la méthode de Jacobi converge (pour tout vecteur initial) si et seulement si $\alpha \in]-1, 1[$.
3. Montrer que la méthode de Gauss-Seidel converge (pour tout vecteur initial) si et seulement si $\alpha \in]-1, 1[$.

Exercice 3. *Moindres carrés.*

On veut résoudre au sens des moindres carrés le système

$$D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b, \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire la définition de « $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ est solution du système $D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b$ au sens des moindres carrés ».
2. Écrire l'équation normale associée au problème aux moindres carrés.
3. Résoudre l'équation normale.
4. Calculer la norme 2 du résidu (ou erreur).

Exercice 4. *Disques de Gerschgorin*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda - A_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |A_{i,j}| \right\}.$$

2. Montrer que les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3+i & 1 & i & -1 \\ 0 & 3-i & 1 & -i \\ i & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1+i & -i & 5 \end{pmatrix}$$

sont de partie réelle strictement positive.