Université Claude Bernard Lyon I
Département de Mathématiques
Année universitaire 2022-2023
L3 Mathématiques générales et applications

Algèbre linéaire et bilinéaire, analyse matricielle

Examen final
vendredi 13/01/2023, 10h00-12h00 (durée : 2h)

L'énoncé comporte quatre exercices indépendants
L'usage de documents et d'appareils électroniques est interdit

Exercice 1

On considère la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie dans la base canonique par :

$$Q(x, y, z) = x^2 + 5y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 6yz$$

1) Déterminez la matrice symétrique associée à Q, ainsi que son rang et son noyau.

2) Décomposez Q en somme de carrés de formes linéaires indépendantes. En déduire la signature et le rang de Q.

3) Déterminez une base orthogonale pour Q.

Exercice 2

On se place sur l'espace $\mathbb{C}^n$ muni de sa base canonique et de son produit scalaire hermitien canonique. On considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ qui est normale.

1) Rappelez la définition de l'adjoint de A. Rappelez ce qu'est une matrice normale. Rappelez les propriétés de diagonalisation des matrices normales.

2) Montrez qu'il existe des projecteurs orthogonaux $P_1, \dots, P_k$ sur $\mathbb{C}^n$ et des complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, deux à deux différents, tels que

- i) $\sum_{i=1}^k P_i = I$
- ii) $P_i P_j = 0$ pour $i \neq j$
- iii) $A = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$.

3) Soit $Q \in \mathbb{C}_n[X]$ un polynôme complexe. Montrez que $Q(A) = \sum_{i=1}^k Q(\lambda_i) P_i$.

4) Montrez que, pour tout $i = 1, \dots, k$, il existe un polynôme Q_i tel que $Q_i(A) = P_i$.

5) Soit $B \in M_n(\mathbb{C})$ tel que $AB = BA$.

- a) Montrez que $P_i B = B P_i$ pour tout $i = 1, \dots, k$.
- b) En déduire la forme générale de toutes les matrices $B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$.

Exercice 3

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

1) Déterminez ImA et Ker$A$.

On considère la matrice

$$B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} .$$

2) Montrez que AB est le projecteur orthogonal sur ImA et que BA est le projecteur orthogonal sur (Ker$A)^\perp$.

On admet pour la suite de l'exercice que B est le pseudo-inverse de A.

3) Quelles sont les solutions du système $Ax = b$ avec $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

4) a) Quelles sont les solutions de l'équation normale $A^*Ax = A^*b$?

b) Expliquez pourquoi ces solutions coïncident avec celles de la question 4).

5) Déterminez de deux manières différentes la solution de norme minimale.

Exercice 4

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 7 \\ -2 & -4 & -3 & 8 \end{pmatrix} .$$

1) Calculer la décomposition LU de la matrice A.

2) En déduire les solutions du système

$$Ax = \begin{pmatrix} -3 \\ -10 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix} ,$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}^4$.