Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2020-2021

Analyse matricielle – L3

Contrôle continu numéro 2, correction rapide

Sujet A

Exercice 1

1. NON (la matrice n'est pas symétrique).
2. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$
3. On trouve $x = (4, 1, -1, 0)^t$

Exercice 2 $Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

$$A^* = VDU^*$$

où

$$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & * \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & * \\ 1/\sqrt{3} & 0 & * \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^\dagger = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Les solutions de l'équation normale sont

$$\begin{pmatrix} x \\ -1+x \\ 1-2x \end{pmatrix}$$

La solution minimale est $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}^t$

Exercice 4 Réponse : $\alpha > 4$ et β quelconque pour les deux questions.

Contrôle continu numéro 2, correction rapide

Sujet B

Exercice 1

1. NON (la matrice n'est pas symétrique).
2. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$
3. On trouve $x = (0, 1, 1, -1)^t$

Exercice 2 $Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

$$A^* = VDU^*$$

où

$$V = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & * \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & * \\ 2/3 & -1/\sqrt{2} & * \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^\dagger = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 13 & 5 \\ -5 & -13 \end{pmatrix}$$

Les solutions de l'équation normale sont

$$\begin{pmatrix} -4z-2 \\ z+1 \\ z \end{pmatrix}$$

La solution minimale est $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}^t$

Exercice 4 Réponse : $\alpha\beta < 3/4$ pour les deux questions.

Contrôle continu numéro 2, correction rapide

Sujet C

Exercice 1

1. NON (la matrice n'est pas symétrique).
2. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
3. On trouve $x = (-1/2, 1/2, 0, 0)^t$

Exercice 2 $Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

$$A^* = VDU^*$$

où

$$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & * \\ 2/\sqrt{6} & 0 & * \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & * \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^\dagger = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Les solutions de l'équation normale sont

$$\begin{pmatrix} -1+z \\ 1/2-z \\ z \end{pmatrix}$$

La solution minimale est $\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}^t$

Exercice 4 Réponse : $\beta < 4$ et α quelconque pour les deux questions.