Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre automne 2023-2024**

L2 - Informatique | UE : Statistiques pour l'Informatique

Questions amusantes pour s'exercer

Les calculatrices ne sont pas neccesaires.

Exercice 1 Une équipe de N joueurs se tiennent en cercle. Chacun porte un chapeau rouge ou bleu. Les chapeaux ont été attribués au hasard, avec une probabilité uniforme. Chacun peut voir les chapeaux des autres, mais pas le sien. L'équipe gagne quand elle prédit correctement si le nombre de chapeaux rouges est pair ou impair. À cette fin, chaque joueur peut voter (pair ou impair) sans pouvoir tenir compte des votes des autres, et la majorité l'emporte. On suppose que $N \geq 3$ est un nombre impair.
Existe-t-il une stratégie gagnante à coup sûr ?
L'équipe décident de suivre la stratégie suivante : Si un joueur voit plus de chapeaux bleus que de chapeaux rouges alors il vote selon la parité du nombre de chapeaux rouges qu'il voit. S'il voit plus de chapeaux rouges que de chapeaux bleus alors il vote selon la parité du nombre de chapeaux bleus qu'il voit. Dans tous les autres cas il vote par hazard.

1. Montrer que, si la différence entre le nombre de chapeaux rouges et le nombre de chapeaux bleus est au moins 2, alors, en suivant cette stratégie, le résultat du vote donne la bonne réponse.
2. Déterminer la probabilité que l'équipe perde, en suivant les étappes suivantes : Soit A l'évènement que la différence entre le nombre de chapeaux rouges et le nombre de chapeaux bleus est 1.
   (a) Définissez une variable aléatoire X qui permet d'exprimer $P(A)$ à l'aide de sa loi.
   (b) Donner une formule exacte pour $P(A)$ en fonction de N.
   (c) Evaluer $P(A)$ à l'aide de la formule de Stirling : $n! \cong \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$
   (d) Quelle est la probabilité que l'équipe perde ?
   (e) En déduire que dans la limite ou $N \to +\infty$ l'équipe gagne toujours.
3. Donner une approximation de la loi de X pour N large, qui fait intervenir une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Quelles sont les valeurs pour μ est σ ?
4. Exprimer $P(|X - \frac{N-1}{2}| \leq 1)$, pour N large, à l'aide de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Faites un dessin sur lequel vous indiquez la surface dont l'aire correspond à $P(-1 \leq X - k - \frac{1}{2} \leq 1)$. Comparer le résultat avec (2c).

Exercice 2 Un joueur peut jouer contre la banque le jeu suivant : Il y a trois caisses fermées dont une contient un billet de 100 Euro tandis que les autres sont vides. Le joueur commence par choisir une caisse. À ce moment, sans l'ouvrir la caisse choisie, le banquier doit ouvrir une caisse qui n'est ni celle choisie par le joueur ni celle celle contenant le billet. Le joueur a alors le droit ou bien d'ouvrir la caisse qu'il a choisie initialement, ou bien d'ouvrir la troisième caisse. S'il ouvre la caisse avec les 100 Euro il peut les garder. Le droit d'entrée à ce jeu est de 60 Euro.

1. Etablir une stratégie pour le joueur et calculer l'ésperance de gain pour lui quand il suit cette stratégie. Est-ce que ca vaut la peine de jouer ? *Utiliser les probabilités conditionelles pour résoudre cette question.*
2. Etablir une stratégie pour le banquier et calculer l'ésperance de gain pour la banque quand il suit cette stratégie.