Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre automne 2023-2024**

L2 - Informatique — UE : Statistiques pour l'Informatique

Questions amusantes pour s'exercer

Les calculatrices ne sont pas neccesaires.

Exercice 1 Une équipe de N joueurs se tiennent en cercle. Chacun porte un chapeau rouge ou bleu. Les chapeaux ont été attribués au hasard, avec une probabilité uniforme. Chacun peut voir les chapeaux des autres, mais pas le sien. L'équipe gagne quand elle prédit correctement si le nombre de chapeaux rouges est pair ou impair. À cette fin, chaque joueur peut voter (pair ou impair) sans pouvoir tenir compte des votes des autres, et la majorité l'emporte. On suppose que $N \geq 3$ est un nombre impair.
Existe-t-il une stratégie gagnante à coup sûr ?
L'équipe décident de suivre la stratégie suivante : Si un joueur voit plus de chapeaux bleus que de chapeaux rouges alors il vote selon la parité du nombre de chapeaux rouges qu'il voit. S'il voit plus de chapeaux rouges que de chapeaux bleus alors il vote selon la parité du nombre de chapeaux bleus qu'il voit. Dans tous les autres cas il vote par hazard.

1. Montrer que, si la différence entre le nombre de chapeaux rouges et le nombre de chapeaux bleus est au moins 2, alors, en suivant cette stratégie, le résultat du vote donne la bonne réponse.
   Solution : Supposons qu'il y a au moins deux chapeaux bleus de plus que des chapeaux rouges. Alors personne vote par hazard. De plus, tous ceux qui ont un chapeau rouge vote faux pendant que tous ceux qui ont un chapeaux bleu vote juste. Donc la majorité vote juste. Par un argument symétrique la majorité vote juste aussi dans le case ou il y a au moins deux chapeaux rouges de plus que des chapeaux bleus.
2. Déterminer la probabilité que l'équipe perde, en suivant les étappes suivantes : Soit A l'évènement que la différence entre le nombre de chapeaux rouges et le nombre de chapeaux bleus est 1.
   (a) Définissez une variable aléatoire X qui permet d'exprimer $P(A)$ à l'aide de sa loi.
   Solution : Comme les chapeaux ont été attribués au hasard, une variable aléatoire X de loi binomial $\mathcal{B}(\frac{1}{2}, N)$ d'ecrit le nombre de chapeaux rouge, c.à.d. la probabilité qu'il y a k chapeaux rouges est $P(X = k) = c_N^k(\frac{1}{2})^k(\frac{1}{2})^{N-k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}\frac{1}{2^N}$. L'évènement A correspond à $X \in \{\frac{N-1}{2}, \frac{N+1}{2}\}$.
   (b) Donner une formule exacte pour $P(A)$ en fonction de N.
   Solution : Soit $k = \frac{N-1}{2}$, alors
   $$P(A) = P(X = k) + P(X = k+1) = \left(\frac{(2k+1)!}{k!(k+1)!} + \frac{(2k+1)!}{(k+1)!k!}\right)\frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{(2k+1)!}{k!(k+1)!}\frac{1}{2^{2n}}$$
   (c) Evaluer $P(A)$ à l'aide de la formule de Stirling : $n! \cong \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$
   $$P(A) = \frac{(2k+1)!}{k!(k+1)!}\frac{1}{2^{2n}} = \frac{2k+1}{k+1}\frac{(2k)!}{k!k!}\frac{1}{2^{2n}} \cong \frac{2k+1}{k+1}\frac{\sqrt{2\pi 2k}}{\sqrt{2\pi k}^2} = \frac{2k+1}{\sqrt{\pi k}(k+1)} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(N-1)}}\frac{N}{N+1}$$
   (d) Quelle est la probabilité que l'équipe perde ?
   Solution : Si A n'a pas lieu alors la probabilité que l'équipe perde est 0. Si A a lieu alors il y a soit $k+1$ chapaux bleus et k chapeaux rouges, soit $k+1$ chapaux rouges et k chapeaux bleus (avec $N = 2k+1$). Dans le premier cas, les joueurs avec un chapeau rouge vote faux, mais les joueurs avec un chapeau bleu vote par hazard. Pour gagner il fallait que les joueurs avec un chapeau bleu vote tous juste et la probabilité de cet évènement est $\frac{1}{2^{k+1}}$. Donc la probablité de gagné si A a lieu est $\frac{2}{2^{k+1}}$. La probabilité que l'équipe perde est alors $(1 - \frac{1}{2^k})P(A) + 0P(A^c) = \frac{(1-2^{-\frac{N-1}{2}})2\sqrt{2}N}{\sqrt{\pi(N-1)}(N+1)}$.

(e) En déduire que dans la limite ou $N \to +\infty$ l'équipe gagne toujours.

Solution : Clairement $\frac{(1-2^{-\frac{N-1}{2}})2\sqrt{2}N}{\sqrt{\pi(N-1)(N+1)}} \longrightarrow 0$ si $N \to +\infty$.

3. Donner une approximation de la loi de X pour N large, qui fait intervenir une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Quelles sont les valeurs pour μ est σ ?
Solution : X peut etre approximé par la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ qui a la même moyenne et le même écart type que $\mathcal{B}(\frac{1}{2}, N)$, notament $\mu = N\frac{1}{2}$ et $\sigma = \sqrt{N\frac{1}{4}}$.

4. Exprimer $P(|X - \frac{N-1}{2}| \leq 1)$, pour N large, à l'aide de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Faites un dessin sur lequel vous indiquez la surface dont l'aire correspond à $P(-1 \leq X - \frac{N-1}{2} \leq 1)$. Comparer le résultat avec (2c).
Solution : La variable centrée réduite $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-\frac{N}{2}}{\frac{\sqrt{N}}{2}}$ peut etre approximé par la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On a $|X - \frac{N-1}{2}| \leq 1$ ssi $|Y + \frac{1}{2}| \leq \frac{2}{\sqrt{N}}$ donc $\frac{-3}{\sqrt{N}} \leq Y \leq \frac{1}{\sqrt{N}}$. D'oú

$$P(|X - \frac{N-1}{2}| \leq 1) = P(|Y + \frac{1}{2}| \leq \frac{2}{\sqrt{N}}) = \int_{-\frac{3}{\sqrt{N}}}^{\frac{1}{\sqrt{N}}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \cong \int_{-\frac{3}{\sqrt{N}}}^{\frac{1}{\sqrt{N}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{4}{\sqrt{2\pi N}}$$

Ici on a utilisé que proche de $x = 0$ on a $e^{-\frac{x^2}{2}} \cong 1$ ce qui est le cas si N est grand. On observe alors que $P(|X - \frac{N-1}{2}| \leq 1)$ est, pour grand N, à peu près égal à $P(A)$.

<u>Exercice 2</u> Un joueur peut jouer contre la banque le jeu suivant : Il y a trois caisses fermées dont une contient un billet de 100 Euro tandis que les autres sont vides. Le joueur commence par choisir une caisse. À ce moment, sans l'ouvrir la caisse choisie, le banquier doit ouvrir une caisse qui n'est ni celle choisie par le joueur ni celle celle contenant le billet. Le joueur a alors le droit ou bien d'ouvrir la caisse qu'il a choisie initialement, ou bien d'ouvrir la troisième caisse. S'il ouvre la caisse avec les 100 Euro il peut les garder. Le droit d'entrée à ce jeu est de 60 Euro.

1. Etablir une stratégie pour le joueur et calculer l'ésperance de gain pour lui quand il suit cette stratégie. Est-ce que ca vaut la peine de jouer ? *Utiliser les probabilités conditionelles pour résoudre cette question.*
Solution : Une strategie gagnante est la suivante : le joueur doit systematiquement ouvrir la troisième caisse. Soit B l'évènement que le joueur a choisi au début la caisse avec le billet. Soit A l'évènement que le joueur a puis ouvert la caisse avec le billet (et donc gagne le billet). Alors

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$

On a $P(B) = \frac{1}{3}$. On a $P(A|B) = 0$ et $P(A|B^c) = 1$ selon la strategie. En effet, si B a eu lieu la troisième caisse doit etre vide et si B n'a pas eu lieu la troisième caisse doit contenir le billet. D'où $P(A) = P(B^c) = \frac{2}{3}$ avec cette stratégie. L'espérence de gain est alors $P(A) \times 100, - = 66,66$ ce qui est plus grand que le droit d'entrée de ce jeu. Donc ca vaut la peine de tenter le coup.

2. Etablir une stratégie pour le banquier et calculer l'ésperance de gain pour la banque quand il suit cette stratégie.
Solution Le banquier a seulement un choix si B a eu lieu. Mais ce choix n'influence pas le résultat pour le joueur. Donc tous les strategies du banquier reviennent au même. L'espérence du gain pour la banque est $60, - - 66,66 = -6,66$ euro.