

Feuille de TD 7

La table pour les valeurs de la fonction de repartition $F_{\mathcal{N}(0,1)}(z) = \int_{-\infty}^z \rho_{\mathcal{N}(0,1)}(x)dx$ de la loi normale se trouve sur la feuille TD6.

Loi normale $\mathcal{N}(0,1)$: tableau de valeurs de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ telles que $\int_{-z_{\frac{\alpha}{2}}}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \rho_{\mathcal{N}(0,1)}(x)dx = 1 - \alpha$

$1 - \alpha$	0.80	0.85	0.90	0.95	0.99
$z_{\frac{\alpha}{2}}$	1.28	1.44	1.645	1.96	2.58

Loi de Student à n de degrés de liberté $\mathcal{T}(n)$: tableau de valeurs de $t(n)_{\frac{\alpha}{2}}$ t.q. $\int_{-t(n)_{\frac{\alpha}{2}}}^{t(n)_{\frac{\alpha}{2}}} \rho_{\mathcal{T}(n)}(x)dx = 1 - \alpha$

n	8	9	10	11
$t(n)_{0.025}$	2.306	2.262	2.228	2.201
$t(n)_{0.05}$	1.860	1.833	1.812	1.796

Exercice 7.1 On veut étudier la proportion p de gens qui boivent du thé chaque jour. On prend donc un échantillon de taille $n = 100$. Soit N le nombre de personnes dans l'échantillon qui boivent du thé chaque jour.

1. Quelle est la loi de N ? Quelle est la moyenne de N ? Quelle est la variance de N ?
2. Par quelle loi peut-on approcher la loi de N ? En déduire une approximation de la loi de $F = N/n$.
3. On observe une proportion $f = 0.1$ de gens qui boivent du thé chaque jour. Donnez l'intervalle de confiance pour p , de niveau de confiance $1 - \alpha$ pour $1 - \alpha = 90\%, 95\%, 99\%$.

Exercice 7.2 Vous envisagez l'hypothèse que la moyenne μ du minimum de température annuelle t à Lyon est strictement plus basse que -6.5 . Vous avez pris un échantillon de taille $n = 40$, correspondant aux 40 dernières années, et vous mesurez un écart type empirique $s = 2.2$.

1. Formulez l'hypothèse nulle H_0 et l'hypothèse alternative H_1 . En approchant la loi de student par la loi normale, quel estimateur prenez vous pour tester votre hypothèse ?
2. Après évaluation de l'échantillon, quel est le critère de rejet de l'hypothèse nulle si le niveau $1 - \alpha$ du test souhaité est de 90% ?
3. Vous avez trouvé -7.1 comme moyenne de l'échantillon. Est-ce que vous rejetez l'hypothèse nulle ? Quelle est la p -valeur du test ? Est-ce que le résultat du test est significatif ?
4. Est-ce que l'approximation par la loi normale est justifié ? Pour juger cela, déterminez la p -valeur du test pour la loi de Student et comparez le avec celle pour la loi normale. (On a $F_{\mathcal{T}(39)}(-1.725) \cong 0.046$.)

Exercice 7.3 Vous lancez 100 fois une pièce de monnaie et vous tombez 43 fois sur FACE. Est-ce que la pièce est truquée ?

1. Avec un test pour la proportion (moyenne pour la loi de Bernoulli) testez l'hypothèse que la proportion des FACE soit différente de $1/2$. Rejetez-vous l'hypothèse avec un niveau de confiance de 95% ?
2. Déterminer la p -valeur du test.

Exercice 7.4 Il est d'usage de commercialiser un nouveau médicament seulement si on est confiant à un niveau de 95% qu'il est plus efficace que l'ancien. Avec le médicament A, la durée moyenne de disparition de la douleur était 30 min. On a administré le médicament B à 12 malades et relevé les durées de disparition de la douleur suivantes :

25 28 20 32 17 24 41 28 25 30 27 24 (minutes)

Avec un test pour la moyenne μ , sans qu'on connaisse l'écart type σ en avance, testez l'hypothèse que la durée de disparition de la douleur avec le médicament B est plus courte que celle de médicament A. Lancez-vous la commercialisation ?