Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre automne 2023-2024**

L2 - Informatique — UE : Statistiques pour l'Informatique

Feuille de TD6

Loi normale $\mathcal{N}(0,1)$: tableau de valeurs de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ telles que $\int_{-z_{\frac{\alpha}{2}}}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \rho_{\mathcal{N}(0,1)}(x)dx = 1-\alpha$

$1-\alpha$	0.80	0.85	0.90	0.95	0.99
$z_{\frac{\alpha}{2}}$	1.28	1.44	1.645	1.96	2.58

Loi de Student à n de degrés de liberté $\mathcal{T}(n)$: tableau de valeurs de $t(n)_{\frac{\alpha}{2}}$ t.q. $\int_{-t(n)_{\frac{\alpha}{2}}}^{t(n)_{\frac{\alpha}{2}}} \rho_{\mathcal{T}(n)}(x)dx = 1-\alpha$

n	8	9	10	11
$t(n)_{0.025}$	2.306	2.262	2.228	2.201
$t(n)_{0.05}$	1.860	1.833	1.812	1.796

Exercice 6.1 On note $f_{\mathcal{N}(0,1)}$ la densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, $F_{\mathcal{N}(0,1)}$ sa fonction de répartition. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

1. $\int_{-z_{\frac{\alpha}{2}}}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} f_{\mathcal{N}(0,1)}(x)dx = 1-\alpha$
2. $F_{\mathcal{N}(0,1)}(z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Quelle est la valeur de z_0, et de $z_{\frac{1}{2}}$?

Exercice 6.2 On considère un échantillon probabiliste de taille n avec loi commune $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$. On veut estimer la moyenne μ à l'aide de l'estimateur $\bar{X}$ (moyenne empirique). Soit $d > 0$.

1. Quelle est l'espérance de $\bar{X}$? Quelle est la variance de $\bar{X}$? Quelle est la loi de $\bar{X}$?
2. Écrire $P(|\bar{X}-\mu| \leq d)$ en termes d'une variable normale centrée réduite.
3. Exprimer en fonction de σ et d le plus petit n t.q. $P(|\bar{X}-\mu| \leq d) \geq 1-\alpha$ pour $\alpha = 5\%$ et $\alpha = 1\%$.

Exercice 6.3 Déterminer un intervalle de confiance bilatéral à 90% pour la moyenne μ d'une population, si l'échantillon a une taille de $n = 63$, une moyenne empirique de 81.3 dans les deux cas suivants

1. La variance est connue en avance. Elle vaut 33.64. On fait une approximation par une loi normale.
2. La variance n'est pas connue en avance. L'échantillon a une variance non-biaisée de 33.64. On utilise la loi de Student. On a $t(62)_{0.05} = 1.671$.

Exercice 6.4 Dans l'atmosphere, le poids en mg d'un gaz nocif pour un volume donné est modélisé par une va. $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$. On effectue n prélèvements qui conduisent à un échantillon numérique $x = (x_1, \cdots, x_n)$ de moyenne empirique $\overline{x}$ et d'écart-type s (s^2 est la variance non biaisée). Déterminer, pour la moyenne m un intervalle de confiance I au niveau de confiance $1-\alpha$ dans les cas suivants :

1. I bilatéral, $1-\alpha = 0.9$, $n = 12$, $\sigma = 10$, $\overline{x} = 50$
2. I bilatéral, $1-\alpha = 0.9$, $n = 12$, σ inconnu, $\overline{x} = 50$, $s = 10$.

Exercice 6.5 Pour une étude sur la moyenne du revenu par semaine des serveurs et serveuses dans des restaurants d'une grande ville on a recueilli les données de 75 personnes. La moyenne empirique des données est $227, -$ et l'écart type est supposé connu et valant $15, -$. Déterminer un intervalle de confiance bilatéral pour la moyenne à 90%, et puis celui à 80%.

Exercice 6.6 Une compagnie pharmaceutique veut savoir si le procédé de fabrication qu'elle utilise fournit effectivement des comprimés dosés à 5mg de principe actif d'un medicament. L'écart type empirique est estimé à 0.07mg.
La quantité de principe actif est mesurée pour 100 comprimés issus d'un lot de fabrication. Le dosage moyen de principe actif est de 4.85 mg.
Peut-on dire avec une confiance de 95% que le processus donne le dosage prévu ?

Exercice 6.7 On suppose que la température moyenne au mois d'août à Paris suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ inconnus. Durant neuf années consécutives autour de 2000 on a mesuré les valeurs

$$22\ 19\ 21\ 23\ 20\ 22\ 24\ 18\ 20$$

1. Déterminer l'intervalle de confiance (bilatéral) de risque $\alpha = 0,1$ pour la moyenne μ.
2. Refaire le calcul en approximant la loi de Student par une loi normale. L'approximation par une loi normale est-elle justifiée ?

Exercice 6.8 On aimerait estimer la quantité de phosphate (en mg/l) en moyenne dans l'eau d'un lac. Les études des années précédentes laissent supposer que le contenu en phosphate fluctue autour de sa moyenne suivant une loi normale avec un écart type $\sigma = 4$mg/l. Combien de tests d'eau faut-il faire pour être à 90% sûr que l'erreur de l'estimation ne dépasse pas 0.8mg/l ?