Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre automne 2022-2023**

L2 - Informatique — UE : Statistiques pour l'Informatique

Feuille TD 3: Correction partielle

Exercice 3.1 On lance deux dés (à 6 faces). Décrire l'espace de réalisation Ω. On le munit de la probabilité uniforme (rappeler la formule du cours décrivant cette probabilité). Déterminer la probabilité des événements correspondant à trouver chacune des valeurs $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ ou 12 comme somme de deux résultats.
Indication : on pourra distinguer les valeurs en dessous de 7 et celles au dessus.

(cf. TD)

Exercice 3.2 On lance n fois une pièce. On munit l'espace de réalisation de la probabilité uniforme.

1. Décrire l'espace de probabilité.
2. Quelle est la probabilité qu'on trouve exactement k fois pile ?
3. Quelle est la probabilité que la liste de résultats reste la même si l'on lit dans le sens inverse ?

(cf. TD)

Exercice 3.3

1. On possède deux pièces truquées différentes, la première obtient face avec probabilité p, la seconde avec probabilité q. On lance ces deux pièces successivement et indépendamment. Décrire l'ensemble Ω et construire une probabilité sur Ω.

   Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois face ?

2. Deux archers tirent indépendamment sur n cibles, une flèche par cible et par archer. Le premier touche avec probabilité p, le second avec probabilité q, les tirages d'un même archer étant aussi indépendants. Décrire l'espace de réalisation Ω et construire une probabilité du Ω.

   Quelle est la probabilité que k cibles au moins soient épargnées ?

Réponse. 1. Notons P pour « pile » et F pour « face ». On modélise l'expérience par un élément de $\{P, F\} \times \{P, F\}$. Avec l'hypothèse d'indépendance des deux tirages, on définit :

$$\mathbb{P}\big(\{(F,F)\}\big) = pq, \qquad \mathbb{P}\big(\{(F,P)\}\big) = p(1-q),$$
$$\mathbb{P}\big(\{(P,F)\}\big) = (1-p)q, \qquad \mathbb{P}\big(\{(P,P)\}\big) = (1-p)(1-q).$$

On cherche la probabilité de l'événement « au moins une fois face », c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}\big(\{(F,F),\ (F,P),\ (P,F)\}\big) = pq + p(1-q) + (1-p)q = p + q - pq.$$

On aurait pu calculer d'abord la probabilité de l'événement complémentaire, $\{(P,P)\}$, qui vaut $(1-p)(1-q)$, et trouver :

$$\mathbb{P}\big(\{(F,F),\ (F,P),\ (P,F)\}\big) = 1 - \mathbb{P}\big(\{(P,P)\}\big) = 1 - (1-p)(1-q) = 1 - 1 + p + q - pq.$$

2. Considérons une cible. Au lieu de retenir le score précis de chaque archer, on retient seulement le fait que l'un au moins des archers réussisse (on appelle ça « succès », noté S) ou que tous deux ratent la cible (on appelle ça « échec », noté E). D'après la question précédente, pour chaque cible, on a : $p' = \mathbb{P}(E) = (1-p)(1-q)$ et $\mathbb{P}(S) = 1 - \mathbb{P}(E) = p + q - pq = 1 - p'$.

   Quand on répète n fois cette expérience, la loi qui décrit la nouvelle expérience est la loi binomiale. Une série de tirs est décrite par une série de lettres $(t_1, \ldots, t_n) \in \Omega = \{S, E\}^n$. La probabilité du singleton $\{(t_1, \ldots, t_n)\}$ est $p'^a(1-p')^b$, où a est le nombre d'indices j tels que $t_j = E$ et $b = n - a$ est le nombre de j tels que $t_j = S$.

   Pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, soit C_k l'événement correspondant à « exactement k cibles sont épargnées ». Un élément de C_k est déterminé par le choix des k indices j tels que $t_j = E$. Il y en a $\binom{n}{k}$ et les singletons correspondants ont la même probabilité $p'^k(1-p')^{n-k}$. On a donc :

$$\mathbb{P}(C_k) = \binom{n}{k} p'^k (1-p')^{n-k}.$$

   L'événement « au moins k cibles sont épargnées » est la réunion disjointe $B_k = C_k \cup C_{k+1} \cup \cdots C_n$. Sa probabilité est :

$$\mathbb{P}(B_k) = \sum_{\ell=k}^{n} \mathbb{P}(C_\ell) = \sum_{\ell=k}^{n} \binom{n}{\ell} p'^\ell (1-p')^{n-\ell}.$$

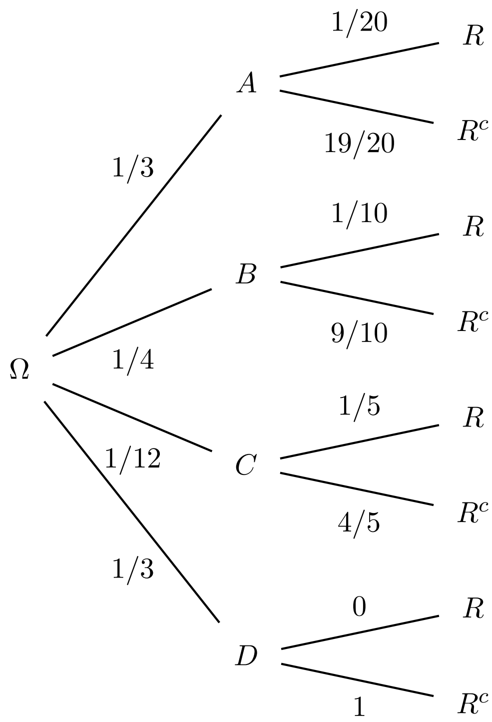
Exercice 3.4 Pour se rendre à la Doua, une étudiante a le choix entre quatre itinéraires : A, B, C et D. La probabilité qu'elle choisisse A (respectivement B, C) est $1/3$ (respectivement $1/4$, $1/12$). La probabilité d'arriver en retard en empruntant le chemin A (respectivement B, C) est $1/20$ (resp. $1/10$, $1/5$). En empruntant le chemin D elle n'est jamais en retard.

1. Calculer la probabilité que l'étudiante arrive en retard.
2. Un jour donné, l'étudiante est en retard. Quelle est la probabilité qu'elle ait emprunté l'itinéraire C ?

Réponse. 1. Les hypothèses s'écrivent, en notant R l'événement « l'étudiante est en retard » :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}, \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}, \qquad \mathbb{P}(C) = \frac{1}{12}, \qquad \mathbb{P}(D) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{3}\ ;$$
$$\mathbb{P}(R \mid A) = \frac{1}{20}, \qquad \mathbb{P}(R \mid B) = \frac{1}{10}, \qquad \mathbb{P}(R \mid C) = \frac{1}{5}, \qquad \mathbb{P}(R \mid D) = 0.$$

On peut aussi traduire l'énoncé sous forme d'un arbre de probabilité. Attention ! Dans un arbre de probabilité, on note les probabilités conditionnelles sur les branches : la probabilité conditionnelle de l'événement de droite sachant tout ce qui est à gauche.



On applique le théorème des probabilités totales (début du chapitre 3), avec le système complet d'événements (A, B, C, D). Mais tout d'abord, pourquoi (A, B, C, D) est-il un système complet d'événements de Ω ? Relisons la définition au chapitre 2 partie 3. Tout simplement, ces événements sont deux à deux incompatibles (on prend un chemin ou l'autre, mais pas les deux en même temps) et il n'existe que 4 itinéraires possibles dont la réunion de ces événements est bien Ω tout entier. Il existe d'autres systèmes complets d'événements. Par exemple (R, R^c). Mais nous utiliserons ici (A, B, C, D).

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R) &= \mathbb{P}(R \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(R \mid B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(R \mid C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(R \mid D)\mathbb{P}(D) \\ &= \frac{1}{60} + \frac{1}{40} + \frac{1}{60} + 0 = \frac{7}{120} \simeq 0{,}058\end{aligned}$$

2. On cherche à calculer $\mathbb{P}(C \mid R)$. On dispose des probabilités conditionnelles dans l'autre sens : on déconditionne puis reconditionne, comme on dit dans la restauration industrielle. Le résultat correspondant du cours se nomme le théorème de Bayes, toujours début du chapitre 3.

$$\mathbb{P}(C \mid R) = \frac{\mathbb{P}(C \cap R)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\mathbb{P}(R \mid C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{12}}{\frac{7}{120}} \simeq 0,286,$$

résultat à comparer avec $\mathbb{P}(C) \simeq 0{,}083$.

Exercice 3.5 Alors qu'ils ne représentent que 13% de la population, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 30% des tués sur la route. À l'aide de ces données vérifier qu'un jeune a 2.87 fois plus de risque de mourir sur la route qu'un autre usager.

Réponse. On note J l'évènement "être un jeune de 18 à 24 ans" et T l'évènement “être tué sur la route". L'énoncé donne $P(J) = 0.13$ et la probabilité d'être jeune sachant qu'on est tué sur la route $P(J|T) = 0.3$. On demande de calculer $\frac{P(T|J)}{P(T|J^c)}$. Par la définition des probabilités conditionnelles du quotient (puis celles sachant T), on a :

$$\frac{P(T|J)}{P(T|J^c)} = \frac{P(T \cap J)}{P(J)} \frac{P(J^c)}{P(T \cap J^c)} = \frac{P(T \cap J)}{P(T \cap J^c)} \frac{P(J^c)}{P(J)} = \frac{P(J|T)P(T)}{P(J^c|T)P(T)} \frac{P(J^c)}{P(J)}$$

Or on connaît la probabilité d'un complémentaire : $P(J^c) = 1 - P(J)$,$P(J^c|T) = 1 - P(J|T)$, donc on trouve :

$$\frac{P(T|J)}{P(T|J^c)} = \frac{P(J|T)}{1 - P(J^c|T)} \frac{1 - P(J)}{P(J)} = \frac{0.3 * (1 - 0.13)}{(1 - 0.3) * 0.13} \simeq 2.8681$$

Exercice 3.6 On lance deux pièces au hasard. On munit l'espace de réalisation Ω que l'on précisera avec la probabilité uniforme.
On note A l'événement "les deux résultats sont identiques", B l'événement "la première pièce donne Pile" et C l'événement "la seconde pièce donne Face".
Montrer que les trois événements sont deux à deux indépendants, mais pas indépendants.

Exercice 3.7 Deux événements A et B disjoints ($A \cap B = \emptyset$) et de probabilités non nulles, peuvent-ils être indépendants ?

Réponse. A et B indépendants implique $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ et A et B disjoints implique $P(A \cap B) = 0$. Donc le produit $P(A)P(B) = 0$ ce qui implique que soit $P(A) = 0$, soit $P(B) = 0$. (Par contraposée) La réponse est donc non, deux évènements disjoints et de probabilités non nulles ne peuvent pas être indépendants.

Exercice 3.8 On considère une infinité de lancers d'un dé (équilibré à six faces) et on veut déterminer la probabilité de ne jamais obtenir le nombre 1. Pour cela, on introduit pour chaque entier n les événements :

- B : « ne jamais obtenir de 1 » ;
- A_n : « ne pas obtenir de 1 au cours des n premiers lancers ».

1. Comment écrire B à l'aide des événements A_n ($n \geq 1$) ?
2. Est-ce que la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante d'événements ?
3. Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer $\mathbb{P}(A_n)$ en fonction de n.
4. En déduire $\mathbb{P}(B)$. Que peut-on dire de l'événement B ?

Réponse. Pour résoudre cet exercice, nous avons besoin d'introduire les événements C_n : " on n'obtient pas un 1 au n-ième lancer".

1. Dire qu'on n'obtient jamais de 1, c'est dire que pour tout entier n, on n'obtient pas de 1 au cours des n premiers lancers. Par suite, B est l'intersection des A_n :
$$B = \bigcap_{n \geq 1} A_n.$$
2. Non, bien au contraire ! Si on n'a pas obtenu de 1 au cours de $n + 1$ premiers lancers, on n'en a en particulier pas obtenu au cours des n premiers. Par suite, A_{n+1} est contenu dans A_n, c'est-à-dire que $A_{n+1} \subset A_n$.
   Formalisons. Pour chaque $n \in \mathbf{N}^*$,
$$A_n = \bigcap_{k=1}^{n} C_k$$
   On en déduit que :
$$A_{n+1} = \bigcap_{k=1}^{n+1} C_k = \left(\bigcap_{k=1}^{n} C_k \right) \cap C_{n+1} = A_n \cap C_{n+1}$$

et donc, en particulier, pour chaque n, $A_{n+1} \subset A_n$. On dit que la suite $(A_n)_n$ est une suite décroissante d'événements.

3. Pour calculer la probabilité de A_n, il suffit d'utiliser l'indépendance mutuelle des lancers de dés, et donc l'indépendance mutuelle des C_n :
$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} C_k\Big) = \mathbb{P}(C_1) \cdot \mathbb{P}(C_2) \cdots \mathbb{P}(C_n) = \Big(\frac{5}{6}\Big)^n$$
4. En tant qu'intersection d'une famille décroissante d'événements, B a pour probabilité
$$\mathbb{P}(B) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \Big(\frac{5}{6}\Big)^n = 0 \quad \text{car } \frac{5}{6} < 1.$$
L'événement B est donc négligeable – presque sûrement faux – de probabilité nulle. Nous sommes certains d'obtenir un 1. Mais quand ? réponse dans la fiche suivante...

Exercice 3.9

1. On lance deux dés équilibrés (à six faces). Quelle est la probabilité que la somme des deux résultats soit égale à 7 ? Quelle est l'espérance de la somme ?
2. Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour avoir plus d'une chance sur deux d'obtenir au moins un 6 ?
3. Lequel des deux événements suivants est plus probable : obtenir au moins une fois un six en 4 lancers d'un dé ou obtenir au moins une fois un double-six en 24 lancers de deux dés ?

Réponse. 1. *Modélisation.* Commençons par décrire un univers correspondant au lancer d'un dé : $\Omega_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Comme on n'a pas de raison de penser que les faces sont discernables pour le lanceur, on va prendre une probabilité uniforme :
$$\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \mathbb{P}(\{3\}) = \mathbb{P}(\{4\}) = \mathbb{P}(\{5\}) = \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$
C'est la formalisation du tableau suivant.

résultat	1	2	3	4	5	6
probabilité	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Pour décrire le lancer de deux dés, que l'on suppose différentiables, on introduit comme univers l'ensemble des couples (ordonnés) dont les composantes sont les résultats possibles :
$$\begin{aligned}\Omega = \Omega_0^2 = \big\{&(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (1,6),\\ &(2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (2,6),\\ &(3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (3,4),\ (3,5),\ (3,6),\\ &(4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (4,4),\ (4,5),\ (4,6),\\ &(5,1),\ (5,2),\ (5,3),\ (5,4),\ (5,5),\ (5,6),\\ &(6,1),\ (6,2),\ (6,3),\ (6,4),\ (6,5),\ (6,6)\big\}.\end{aligned}$$
En supposant que tous les tirages sont équiprobables, on a donc :
$$\forall (i,j) \in \Omega, \quad \mathbb{P}\big(\{(i,j)\}\big) = \frac{1}{36}.$$

Calculs. Soit S la variable aléatoire qui décrit la somme des deux résultats :

$$\forall (i,j) \in \Omega, \quad S(i,j) = i + j.$$

L'événement $S = 7$ est l'événement

$$\{S = 7\} = \big\{(1,6),\ (2,5),\ (3,4),\ (4,3),\ (5,2),\ (6,1)\big\}.$$

La probabilité des singletons est $1/36$ donc

$$\mathbb{P}(S = 6) = 6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}.$$

On calcule de même les probabilités que S prenne les autres valeurs possibles. Par exemple, $\{S = 4\} = \big\{(1,3),\ (2,2),\ (3,1)\big\}$.

valeur de S	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
probabilité	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
c'est-à-dire	1/36	1/18	1/12	1/9	5/36	1/6	5/36	1/9	1/12	1/18	1/36

On en déduit l'espérance de S :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36}\\ + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36}\\ = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 11 \cdot 2 + 12 \cdot 1}{36}\\ = \frac{252}{36} = 7.\end{aligned}$$

Pouvait-on s'en douter ? Bien sûr, puisque la loi de probabilités est symétrique par rapport à l'espérance 7, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(S = k) = \mathbb{P}(S = 14 - k)$ pour tout $k \in \{2, \cdots, 12\}$. On a donc :

$$\begin{aligned} 2\,\mathbb{E}(S) &= \sum_{k=2}^{12} k \cdot \mathbb{P}(S = k) + \sum_{\ell=2}^{12} \ell \cdot \mathbb{P}(S = \ell)\\ &= \sum_{k=2}^{12} k \cdot \mathbb{P}(S = k) + \sum_{k=2}^{12} (14 - k) \cdot \mathbb{P}(S = 14 - k)\\ &= \sum_{k=2}^{12} k \cdot \mathbb{P}(S = k) + \sum_{k=2}^{12} (14 - k) \cdot \mathbb{P}(S = k)\\ &= 14 \sum_{k=2}^{12} \mathbb{P}(S = k) = 14.\end{aligned}$$

2. *Modélisation.* On se donne un entier n non nul et on tire n fois un dé. Un événement est une suite de n résultats entre 1 et 6 : on prend $\Omega = \{1, \dots, 6\}^n$. Comme tous les tirages ont les mêmes chances d'advenir, on choisit la probabilité uniforme : $\mathbb{P}\Big(\big\{(a_1, a_2, \dots, a_n)\big\}\Big) = 1/6^n$.
   On cherche la probabilité de l'événement $S_n = \big\{(a_1, \dots, a_n) \in \Omega,\ \exists k,\ a_k = 6\big\}$. Le complémentaire de cet événement est

$$\Omega \setminus S_n = S_n^c = \big\{(a_1, \dots, a_n),\ \forall k,\ a_k \leq 5\big\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}^n.$$

   La probabilité de S_n est donc :

$$\mathbb{P}(S_n) = 1 - \Big(\frac{5}{6}\Big)^n.$$

   On cherche n tel que $\mathbb{P}(S_n) \geq 1/2$, c'est-à-dire $\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq \frac{1}{2}$. Or, $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \simeq 0{,}58$ et $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq 0{,}482$.
   À partir de quatre lancers, on a plus d'une chance sur deux de tirer un 6.

3. On a calculé la probabilité d'avoir au moins un six en quatre lancers : $1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq \boxed{0{,}518}$.
   La probabilité de l'autre expérience demande un nouveau calcul.

   Modélisation. On lance 24 fois deux dés. On décrit l'expérience par une suite $\mathbf{b}=(b_1,\dots,b_{24})$ à valeurs dans $\{1,\dots,6\}^2$, c'est-à-dire un élément $\mathbf{b}\in\Omega=\left(\{1,\dots,6\}^2\right)^{24}$. On met sur Ω la probabilité uniforme. On a : $|\Omega|=6^{48}$.

   Calcul. On cherche la probabilité d'avoir au moins un double-six, c'est-à-dire la probabilité de l'événement $A=\left\{\mathbf{b}\in\Omega,\ \exists k\in\{1,\dots,24\},\ b_k=(6,6)\right\}$. Le complémentaire de A est

   $$A^c=\left\{\mathbf{b}\in\Omega,\ \forall k\in\{1,\dots,24\},\ b_k\in B\right\}\quad \text{où } B=\{1,\dots,6\}^2\setminus\{(6,6)\}.$$

   On en déduit que $|A^c|=|B|^{24}=35^{24}$ et que $\mathbb{P}(A^c)=\frac{35^{24}}{36^{24}}$. Ainsi : $\mathbb{P}(A)=1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}\simeq\boxed{0{,}4914}$.
   Ainsi, on a plus de chances de tirer au moins un six en quatre lancers qu'au moins un double-six en vingt-quatre lancers.

Remarque. Le problème de la dernière question a une importance historique. Voir par exemple ici.

Exercice 3.10 Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A)=0{,}3$ et $\mathbb{P}(A\cup B)=0{,}5$. Trouver $\mathbb{P}(B)$ quand :

(a) A et B sont indépendants ;

(b) A et B sont incompatibles ;

(c) $\mathbb{P}(A\mid B)=0{,}1$;

(d) $\mathbb{P}(B\mid A)=0{,}4$.

Réponse. En toute généralité, d'après la proposition du chapitre 2 partie 3), on a : pour tous événements A et B,

$$\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B). \tag{*}$$

(a) Dire que A et B sont indépendants, c'est dire que $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. La relation $(*)$ donne :

$$\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)\big(1-\mathbb{P}(A)\big),$$

d'où

$$\mathbb{P}(B)=\frac{\mathbb{P}(A\cup B)-\mathbb{P}(A)}{1-\mathbb{P}(A)}=\frac{0{,}5-0{,}3}{1-0{,}3}=\frac{0{,}2}{0{,}7}\simeq 0{,}286.$$

(b) Dire que A et B sont incompatibles, c'est dire que $\mathbb{P}(A\cap B)=0$. La relation $(*)$ donne

$$\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A\cup B)-\mathbb{P}(A)=0{,}5-0{,}3=0{,}2.$$

(c) Rappelons que $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A\mid B)\mathbb{P}(B)$. La relation $(*)$ donne :

$$\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)\big(1-\mathbb{P}(A\mid B)\big),$$

d'où, avec $\mathbb{P}(A\mid B)=0{,}1$:

$$\mathbb{P}(B)=\frac{\mathbb{P}(A\cup B)-\mathbb{P}(A)}{1-\mathbb{P}(A\mid B)}=\frac{0{,}5-0{,}3}{1-0{,}1}=\frac{0{,}2}{0{,}9}\simeq 0{,}222.$$

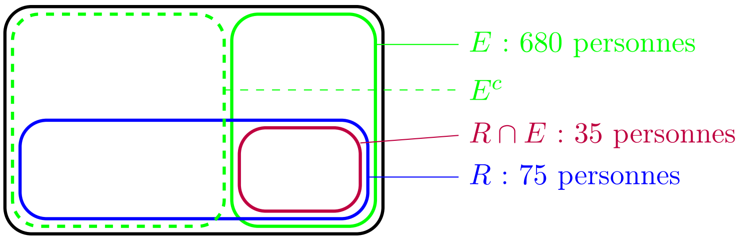
(d) Rappelons que $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(B\mid A)\mathbb{P}(A)$. La relation $(*)$ donne :

$$\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A\cup B)-\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B\mid A)\mathbb{P}(A)=0{,}5-0{,}3+0{,}4\times 0{,}3=0{,}32.$$

Exercice 3.11 Un nouveau vaccin a été testé sur 12 500 personnes ; 75 d'entre elles, dont 35 femmes enceintes, ont eu des réactions secondaires nécessitant une hospitalisation.Parmi les 12 500 personnes testées, 680 personnes sont des femmes enceintes. On pioche une personne au hasard parmi les 12 500 personnes de l'étude.

1. Décrire l'espace de probabilité.
2. Quelle est la probabilité pour une femme enceinte, d'avoir une réaction secondaire si elle reçoit un vaccin ?
3. Quelle est la probabilité pour une personne non enceinte d'avoir une réaction secondaire ?

Réponse. 1. L'espace de réalisation est $\Omega = \{1, ..., 12\,500\}$ l'ensemble des personnes vaccinées, que l'on munit de la probabilité uniforme. . On note R l'événement « la personne a une réaction secondaire » et E l'événement « la personne est une femme enceinte ».



2. La probabilité, pour une femme enceinte, d'avoir une réaction secondaire, est :

$$\mathbb{P}(R \mid E) = \frac{\mathbb{P}(R \cap E)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\frac{|R\cap E|}{|\Omega|}}{\frac{|E|}{|\Omega|}} = \frac{|R \cap E|}{|E|} = \frac{35}{680} \simeq 0{,}0515.$$

   On a la probabilité uniforme restreinte à E. Ce calcul nous montre bien que considérer la probabilité conditionnelle sachant E revient à changer l'ensemble de référence : on passe de Ω à E.

3. On cherche la probabilité pour une personne non enceinte d'avoir une réaction secondaire :

$$\mathbb{P}(R \mid E^c) = \frac{|R \cap E^c|}{|E^c|} = \frac{75 - 35}{12500 - 680} = \frac{2}{591} \simeq 0{,}00338.$$

Ainsi, le fait d'être une femme enceinte fait passer le risque de réaction de 3,4 ‰ à 5,1 %.

Exercice 3.12 *(Exercice à résoudre à la maison.)* Dans une jardinerie : 25 % des plantes ont moins d'un an, 60 % ont de 1 à 2 ans, 25 % ont des fleurs jaunes, 60 % ont des fleurs roses, 15 % ont des fleurs jaunes et moins d'un an, 3 % ont plus de 2 ans et n'ont ni fleurs jaunes, ni fleurs roses. 15 % de celles qui ont de 1 à 2 ans, ont des fleurs jaunes, 15 % de celles qui ont de 1 à 2 ans, n'ont ni fleurs jaunes ni fleurs roses. On suppose que les fleurs ne peuvent pas être à la fois jaunes et roses.
On choisit une plante au hasard dans cette jardinerie. Remplir le tableau suivant qui indique les probabilités de chaque catégorie de plante.

$\mathbb{P}[\cdot \cap \cdot]$	fleurs roses	fleurs jaunes	fleurs ni jaunes ni roses	total
moins de 1 an	.	15 %	.	25 %
entre 1 et 2 ans	.	.	.	.
plus de 2 ans	.	.	.	.
total	.	.	.	100 %

Réponse.

$\mathbb{P}[\,\cdot \cap \cdot\,]$	R : "fleurs roses"	J : "fleurs jaunes"	$(R \cup J)^c$: "autres fleurs"	total
A_1 : moins de 1 an	7 %	15 %	3 %	25 %
A_2 : entre 1 et 2 ans	42 %	9 %	9 %	60 %
A_3 : plus de 2 ans	11 %	1 %	3 %	15 %
total	60 %	25 %	15 %	100 %

L'énoncé nous dit que :

$$\mathbb{P}(A_1) = 0.25, \qquad \mathbb{P}(A_2) = 0.6, \qquad \mathbb{P}(J) = 0.25, \qquad \mathbb{P}(R) = 0.6, \qquad \mathbb{P}(J \cap A_1) = 0.15$$

$$\mathbb{P}(A_3 \cap (R \cup J)^c) = 0.03, \qquad \mathbb{P}(J \mid A_2) = 0.15, \qquad \mathbb{P}((R \cup J)^c \mid A_2) = 0.15$$