
Examen

Les documents et les téléphones sont interdits. Les calculatrices sont autorisées.

On fournit les tables suivantes :

Loi normale, $P(N \leq z_\alpha) = 1 - \alpha$ pour N de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

α	0.2	0.1	0.05	0.025	0.01
z_α	0.842	1.282	1.645	1.96	2.326

Loi de Student : $P(T \leq t(k)_\alpha) = 1 - \alpha$ pour T de loi de Student avec k degrés de liberté.

α	0.2	0.1	0.05	0.025	0.01
$t(10)_\alpha$	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764
$t(11)_\alpha$	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718
$t(12)_\alpha$	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681
$t(13)_\alpha$	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650
$t(14)_\alpha$	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624
$t(15)_\alpha$	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602

Exercice 1.

On rappelle que la densité d'un variable de loi exponentielle de paramètre λ est $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, si $x \geq 0$ et $f(x) = 0$ si $x < 0$.

Un malade est en liste d'attente de greffe et a une espérance de vie sans greffe V (en jours) suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-3} = 0,001$.

Le temps d'arrivée (en jours) T d'un greffon pour ce patient suit une loi exponentielle de paramètre $\mu = 0,01$, indépendante de V .

1. Calculer l'espérance de vie du patient sans greffe $E(V)$.
2. Calculer la probabilité que le patient reçoive une greffe (c'est à dire qu'un greffon arrive avant sa mort).
3. On suppose maintenant qu'une greffe ne peut être faite qu'à une heure fixe chaque jour (qu'on fixe à 0). On note N la partie entière de T , soit le jour d'arrivée du greffon. Calculer la loi de N .
4. Calculer l'espérance du jour de greffe $N + 1$.
5. Calculer la probabilité $P(V > N + 1)$.

Exercice 2. On a procédé à des mesures de concentration en facteur HDL (high-density lipoprotein) du cholestérol du sang chez 172 personnes de sexe masculin âgées entre 30 et 40 ans et ne pratiquant pas une activité sportive intensive. Un niveau élevé de HDL est considéré comme un facteur de protection contre les accidents vasculaires. On suppose la concentration C suit une loi normale de moyenne inconnue μ et de variance σ .

1. On suppose que l'écart type est connu et vaut $\sigma = 10$. On a mesuré une moyenne de 49. Trouver un intervalle de confiance pour la moyenne μ au niveau 0,95.
2. On suppose maintenant que l'écart type n'est pas connu mais que la variance de l'échantillon est 98,8576 et la même moyenne mesuré 49. Trouver un intervalle de confiance pour la moyenne μ au niveau 0,90.

Exercice 3.

Un additif est censé améliorer le rendement d'un carburant et réduire la consommation des véhicules l'utilisant. Pour tester son efficacité, on a effectué sur un parcours normalisé deux séries d'observations sur 12 véhicules de même type. Pour chaque véhicule, on fait un essaie en utilisant le carburant sans additif puis un autre essaie en utilisant le carburant avec additif. On note x la consommation en litres d'essence consommé tous les 100km quand on utilise le carburant sans additif et y la consommation en $l/100km$ quand utilise le carburant avec additif.

Les valeurs observées sont les suivantes :

x	6,4	6,8	6,8	6,5	6,3	6,0	6,2	6,2	6,8	7,1	7,2	6,0
y	6,1	6,7	6,8	6,2	6,4	5,8	6,3	6,2	6,7	6,7	7,0	6,2

On note $z = y - x$ l'amélioration du rendement obtenu grâce à l'additif. On suppose que cette différence z suit une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 inconnus.

1. Calculer les moyennes de x, y et z .
2. Déterminer un intervalle de confiance pour μ de niveau de confiance $1 - \alpha = 0,95$.
3. **(Bonus : 2-3 points ?)**

Tester l'hypothèse nulle H_0 que l'additif ne modifie pas le rendement, c'est à dire $\mu = 0$, au niveau de confiance $1 - \alpha = 0,95$.