**Université Claude Bernard - Lyon 1** **Semestre automne 2023-2024**

L2 - Informatique UE : Statistiques pour l'Informatique

---

**CC2 du 15 novembre 2023, durée 60 min**

---

*Les documents et calculatrices ne sont pas permises. Le barème est indicatif.*

**Question de cours** (3 pts.) Spécifier la loi et son espérance dans le cas

1. de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$
2. de la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$
3. de la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

**Exercice 1** (4 pts.) Toto doit passer un test à choix multiples composé de cinq questions. Pour chaque question, il doit choisir une seule bonne réponse parmi quatre. Toto a décidé de choisir chaque réponse au hasard.

1. Calculez la probabilité qu'il ait au moins trois bonnes réponses. Cette probabilité est désignée par $p$ dans la suite de l'exercice.
2. Toto veut passer le même type de test jusqu'à ce qu'il ait choisi au moins trois bonnes réponses. Combien de fois Toto doit-il s'attendre à devoir passer le test pour obténir sont but ? On admettra que $\frac{1}{9} > p > \frac{1}{10}$.

*Corrigé :*

1. Soit $X$ la variable aléatoire qui correspond au nombre de bonnes réponses. Comme le choix de bonne réponse à chaque question est indépendante et il y a 5 questions avec 4 réponses possibles, $X$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(5, \dfrac{1}{4}\right)$. Donc la probabilité $p$ est donnée par

$$\begin{aligned} p = \mathbb{P}(X \geq 3) =& \mathbb{P}(X=3) + \mathbb{P}(X=4) + \mathbb{P}(X=5) \\ =& \binom{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0 \\ =& 10\cdot\frac{3^2}{4^5} + 5\cdot\frac{3^1}{4^5} + 1\cdot\frac{3^0}{4^5} = \frac{90+15+1}{1024} = \frac{106}{1024}. \end{aligned}$$

2. Soit $Y$ la variable qui donne le nombre de fois que Toto passe le test pour obtenir sont but. $Y$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec le paramètre $p$ qui est la probabilité calculée en question précédente. Comme on a $\dfrac{1}{10} < p < \dfrac{1}{9}$, l'espérance $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{p}$ vérifie $9 < \mathbb{E}(Y) < 10$. Le nombre de fois Toto doit s'attendre à passer le test pour obtenir sont but et égal au plus petit entier $\geq \mathbb{E}(Y)$, donc 10.

**Exercice 2** (4 pts.) Soit $\Omega$ un espace des événements. Soient $A, B \subset \Omega$ deux événements de probabilité non-nulle. On note $B^c = \Omega \backslash B$ l'événement contraire de $B$. On rappelle que $P(A|B)$ designe la probabilité de $A$ sachant $B$.

Vrai ou faux ? Justifier vos réponses en donnant une preuve ou un contre-exemple.

1. $P(A|B) + P(A|B^c) = P(A)$
2. $P(B|A) + P(B^c|A) = P(A)$
3. Si $A$ et $B$ sont indépendents alors $P(A \cap B \cap \Omega) = P(A)P(B)P(\Omega)$.
4. Si $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ alors $A$ et $B$ et $C$ sont indépendents.

*Corrigé :* Ici, il fallait supposer que les probabilités des événements $A, B$ et $B^c$ sont toutes non nulles.

1. Supposons que $A = B$ et $\mathbb{P}(A) \neq 0, 1$. Alors,

$$\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(A|B^c) = \frac{\mathbb{P}(A \cap A)}{\mathbb{P}(A)} + \frac{\mathbb{P}(A \cap A^c)}{\mathbb{P}(A^c)} = 1 + 0 = 1$$

   Comme $\mathbb{P}(A) \neq 0, 1$, l'énoncé est faux.

2. Comme

$$\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(B^c|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} + \frac{\mathbb{P}(B^c \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B^c \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1,$$

   et que $\mathbb{P}(A)$ n'est pas forcément 1, c'est faux.

3. Comme $\Omega$ est l'espace des événements, $A \cap B \cap \Omega = A \cap B$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Donc, l'énoncé est équivalent de $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ qui est vrai car on suppose que $A$ et $B$ son indépendants.

4. On prend $A = B$ avec $\mathbb{P}(A) \neq 0, 1$, et $C = \emptyset$, l'événement impossible. Alors on a $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ et $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A)^2\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, mais $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \neq \mathbb{P}(A)^2 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Donc $A$ et $B$ ne sont pas indépendents. Donc faux.

**Exercice 3** (6 pts.) Soit $X$ une variable aléatoire qui prend les valeurs $1, 2, 6$ avec probabilité uniforme.

1. Calculez l'espérence de $X$.
2. Calculez la variance de $X$.
3. Tracer le graphe de la fonction de repartition de $X$.
4. Quelle est la loi de $X + X$ ?
5. Soit $Y$ une variable aléatoire de même loi que $X$. On suppose que $X$ et $Y$ sont indépendentes. Quelle est la loi de $X + Y$ ?

*Corrigé :*

1. La probabilité est uniforme, donc $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{3}$ pour $k = 1, 2, 6$. D'ou

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 6 \times \frac{1}{3} = 3$$

2. 

$$\mathbb{V}(X) = (1-3)^2 \times \frac{1}{3} + (2-3)^2 \times \frac{1}{3} + (6-3)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{4+1+9}{3} = \frac{14}{3}$$

3. La fonction de repartition est donnée par

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 1 \\ \frac{1}{3} & \text{si} \quad 1 \leq t < 2 \\ \frac{2}{3} & \text{si} \quad 2 \leq t < 6 \\ 1 & \text{si} \quad 6 \leq t \end{cases}$$

   C'est une fonction escalier qui fait un saut de $\frac{1}{3}$ en $1, 2$ et $6$ ...

4. La variable $X + X$ prend les valeurs $2, 4, 12$, chacune avec probabilité $\frac{1}{3}$.

5. La variable $Z = X + Y$ prend les valeurs $2, 3, 4, 7, 8, 12$. Comme les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendentes on a $\mathbb{P}(X = k, Y = l) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = l)$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y=2) &= \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{9} \\
\mathbb{P}(X+Y=3) &= \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=2) + \mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=1) = \frac{2}{9} \\
\mathbb{P}(X+Y=4) &= \mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=2) = \frac{1}{9} \\
\mathbb{P}(X+Y=7) &= \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=6) + \mathbb{P}(X=6)\mathbb{P}(Y=1) = \frac{2}{9} \\
\mathbb{P}(X+Y=8) &= \mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=6) + \mathbb{P}(X=6)\mathbb{P}(Y=2) = \frac{2}{9} \\
\mathbb{P}(X+Y=12) &= \mathbb{P}(X=6)\mathbb{P}(Y=6) = \frac{1}{9}
\end{aligned}$$