

Examen 2ème session – 1 juillet 2020

DURÉE 1H30 MINUTES

On demande une rédaction à la main sur papier libre.

Exercice 1. (5 points) Soit $0 \leq a \leq 1$. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\{1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$ et dont la loi de probabilité est

$$\begin{aligned} P(X = 1, Y = 0) &= a, & P(X = 1, Y = 1) &= \frac{1}{12}, & P(X = 1, Y = 2) &= \frac{1}{6} \\ P(X = 2, Y = 0) &= \frac{1}{12}, & P(X = 2, Y = 1) &= \frac{1}{2}, & P(X = 2, Y = 2) &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

1. Quelle est la valeur de a ? Justifier votre réponse.
2. Quelle est la probabilité que $X = 1$ sachant que $Y = 1$?
3. Donner la loi de X et la loi de Y .
4. Est-ce que X et Y sont indépendantes?
5. Calculer la loi de $X - Y$.

Exercice 2. [5 pts.] Un test de dépistage d'une maladie doit indiquer un résultat positif si le patient est malade et un résultat négatif si le patient est sain. Pour juger si le test est efficace ou non, on détermine la probabilité que le résultat soit positif à tort et la probabilité que le résultat soit négatif à tort.

Pour une maladie qui atteint une proportion P de la population, on considère un test pour lequel

- parmi les résultats positifs, 1% sont des résultats positifs à tort,
- parmi les résultats négatifs, 2% sont des résultats négatifs à tort.

- (i) On suppose que $P = 10\%$ de la population est atteint de la maladie.
 - (a) Avec quelle probabilité le test effectué sur un patient pris au hasard est-il positif?
 - (b) Calculer la probabilité que le patient soit malade si son test est positif.
 - (c) Calculer la probabilité que le patient soit sain si son test est négatif.
- (ii) Répondre à nouveau aux questions (a), (b) et (c) en supposant maintenant que $P = 0.1\%$ de la population est atteint. En comparant les cas (i) et (ii), que peut-on déduire sur l'utilité du test?
- (iii) Que se passe-t-il si P tend vers 0 ou 1?

Exercice 3. On considère une élection à laquelle se présentent deux candidats. Un sondage sur 900 personnes prévoit le candidat A en tête avec 5% d'avance sur le candidat B. On suppose que le sondage est représentatif et on émet l'hypothèse que candidat A va gagner les élections. Peut-on affirmer l'hypothèse avec un niveau de confiance de 95%? Justifier votre réponse.

Exercice 4. Un producteur fournit le marché avec des yaourts dont en moyenne 1 sur 100 sont pourris. Un supermarché achète 10000 yaourts de ce fournisseur. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de yaourts pourris parmi les 10000 que le supermarché a acheté.

1. Quelle est la loi de X ? Déterminer l'espérance et la variance de X .
2. Donner la formule pour la probabilité que le supermarché ait acheté au moins 120 yaourts pourris.
3. Avec quelle loi normale peut-on approcher la loi de X ?
4. Donner la formule (avec un intégrale et la densité de la loi) pour la probabilité que le supermarché ait acheté au moins 120 yaourts pourris en utilisant l'approximation avec la loi normale spécifiée dans la question précédente.
5. En évaluant une des deux formules, calculer la probabilité que le supermarché ait acheté au moins 120 yaourts pourris.

