Université Claude Bernard
Année universitaire 2023 – 2024

Licence de Mathématiques
Analyse 3

Corrigé du partiel du 15 novembre 2023

Exercice 1 `Question de cours`

1. On montre cette propriété par récurrence sur $k \in \mathbf{N}$.
   Initialisation : comme $\varphi(0) \in \mathbf{N}$, on a $\varphi(0) \geq 0$.
   Hérédité : soit $k \in \mathbf{N}$. Supposons que $\varphi(k) \geq k$. Comme φ est strictement croissante et à valeurs entières, on a alors $\varphi(k+1) \geq \varphi(k) + 1 \geq k + 1$.
2. Considérons une suite extraite $(u_{\varphi(k)})_{k \in \mathbf{N}}$, où, par définition, φ est une fonction strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$.
   Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers ℓ, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Soit $k \geq n_0$. Alors, $\varphi(k) \geq k \geq n_0$ donc $|u_{\varphi(k)} - \ell| < \varepsilon$.
   On a ainsi montré que
   $$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbf{N} \; \forall k \geq n_0 \; |u_{\varphi(k)} - \ell| < \varepsilon,$$
   c'est-à-dire que la suite extraite $(u_{\varphi(k)})_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice 2 `Le calcul d'une intégrale par un changement de variable` On pose $t = \sqrt{x-1}$, alors $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{2t}$, ainsi, si on note I l'intégrale à calculer, on a :

$$\begin{aligned} I &= \int_2^3 \frac{2t}{(t^2-1)t} \,\mathrm{d}t = 2 \int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t-1)} \\ &= 2 \int_2^3 \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{t+1} + \frac{1}{t-1} \right) \mathrm{d}t = [\ln(t-1) - \ln(t+1)]_2^3 \\ &= \ln 2 - \ln 4 - (\ln 1 - \ln 3) = -\ln 2 + \ln 3 = \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 3 `Étude d'une suite. Détermination de la borne inférieure et de la borne supérieure d'une partie.`

1. Soit $x \in]0,1]$.
   La fonction sinus est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$ de dérivée cosinus, donc par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0,x[$ tel que $\sin x - \sin 0 = \cos c (x - 0)$. Comme $\sin 0 = 0$, on conclut.
2. Soit $x \in]0,1]$. Par la question précédente, il existe $c \in]0,x[$ tel que $\sin x = x \cos c$. Comme $c \in]0,x[\subseteq]0,2\pi[$, on a $\cos c < 1$. De plus $x > 0$, d'où $x \cos c < x$ et ainsi $\sin x < x$.
3. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.
   Initialisation : comme $u_0 = 1$ et $0 < 1 \leq 1$, on a bien $0 < u_0 \leq 1$.
   Hérédité : soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons que $0 < u_n \leq 1$. Comme la fonction sinus est strictement croissante sur $[0, \pi/2]$ et est majorée par 1, on en déduit que $0 = \sin 0 < \sin u_n \leq 1$, et comme $u_{n+1} = \sin(u_n)$ on obtient $0 < u_{n+1} \leq 1$.

4. Par la question précédente, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $u_n \in]0,1]$, et par la question 2, on en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sin u_n < u_n$. Ainsi, la suite (u_n) est une suite strictement décroissante minorée par 0 et majorée par 1. Elle converge donc vers une limite $\ell \in [0,1]$.
   Par définition, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$, et par continuité de la fonction sinus, on obtient que $\ell = \sin(\ell)$ en faisant tendre n vers l'infini. Alors, en utilisant à nouveau la question 2, on en déduit que $\ell \notin]0,1]$. Comme $\ell \in [0,1]$, on a nécessairement $\ell = 0$.
5. A est non vide : en effet, si on considère par exemple $k = 1$ et $n = 0$, on obtient que $1 - \dfrac{1}{1+u_0}$ est un élément de A.
   Soit $k \in \mathbf{N}^*$ et $n \in \mathbf{N}$. Par la question 3, on a $u_n > 0$, donc $k + u_n > 1$.
   Ainsi, $0 < \dfrac{1}{k+u_n} < 1$ et donc $0 < 1 - \dfrac{1}{k+u_n} < 1$. La partie A est donc minorée par 0 et majorée par 1.
   Comme A est non vide et majorée, elle admet une borne supérieure. La suite $(a_k)_{k\geq 1}$ définie pour $k \in \mathbf{N}^*$ par $a_k = 1 - \dfrac{1}{k+1} = 1 - \dfrac{1}{k+u_0}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers 1. Comme de plus 1 est un majorant de A, par la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, on en déduit que $\sup A = 1$.
   Comme A est non vide et minorée, elle admet une borne inférieure. La suite $(b_n)_{n\geq 0}$ définie pour $n \in \mathbf{N}$ par $b_n = 1 - \dfrac{1}{1+u_n}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers 0 (car la suite (u_n) converge vers 0). Comme de plus 0 est un minorant de A, par la caractérisation séquentielle de la borne inférieure, on en déduit que $\inf A = 0$.

Exercice 4 `Résolution d'une équation différentielle`

1. La fonction f est continue (sur $\mathbf{R}$). Par la théorème fondamental du calcul intégral, f admet une unique primitive F s'annulant en 0 définie pour tout réel x par
$$F(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t.$$
   Fixons un réel x. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$.
   D'autre part la fonction $t \mapsto t$ est également C^1 sur $\mathbf{R}$ de dérivée constante égale à 1. On en déduit en intégrant par parties que
$$\begin{aligned}
F(x) &= \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x \frac{(1+t^2)-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x 1\,\mathrm{d}t + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x = x(\ln(1+x^2)-2) + 2\arctan x.
\end{aligned}$$
2. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de la forme
$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t),\ t \in \mathbf{R} \quad (E)$$

où $a : t \mapsto -2t$ et $b : t \mapsto e^{t^2}\ln(1+t^2)$ sont deux fonctions continues sur $\mathbf{R}$.
La fonction a a pour primitive $t \mapsto -t^2$ et d'après le cours, on en déduit que les solutions de l'équation différentielle homogène associée (E_0) sont de la forme $t \mapsto Ce^{t^2}$ où C est une constante réelle.
Par la méthode de la variation de la constante, on cherche une solution particulière de (E) de la forme $t \mapsto C(t)e^{t^2}$ où C est une fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R}$. Considérons une fonction y_p de cette forme. Alors pour tout réel t, on a $y_p'(t) = C'(t)e^{t^2}) + C(t)(2te^{t^2})$ et donc y_p est solution de (E) si et seulement si

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbf{R},\ C'(t)e^{t^2} + C(t)(2te^{t^2}) - 2tC(t)e^{t^2} &= e^{t^2}\ln(1+t^2) \\ \text{si et seulement si } \forall t \in \mathbf{R},\ C'(t)e^{t^2} &= e^{t^2}\ln(1+t^2) \\ \text{si et seulement si } \forall t \in \mathbf{R},\ C'(t) &= \ln(1+t^2). \end{aligned}$$

Ainsi, $t \mapsto F(t)e^{t^2}$ est solution particulière de (E) où F est la primitive calculée dans la première question.
Il suit que l'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ t & \mapsto & \Big(t\big(\ln(1+t^2)-2\big) + 2\arctan t + C\Big)e^{t^2} \end{array} : C \in \mathbf{R} \right\}.$$

Exercice 5 `Une fonction définie par une intégrale à bornes variables`

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t \end{array}.$$

1. Soit $x \in]0,+\infty[$, $t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ est continue sur $[x,2x]$, ainsi $f(x)$ existe et donc f est bien définie sur $]0,+\infty[$.
2. Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et G est une de ses primitives, on a pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t = G(2x) - G(x)$.
3. G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ qui est continue sur $]0,+\infty[$, ainsi G est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. On en déduit que f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ car c'est une composée et somme de fonctions de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
De plus, pour tout $x \in]0,+\infty[$,
$$f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2\frac{e^{2x}}{2x} - \frac{e^x}{x} = \frac{e^x}{x}(e^x - 1).$$
4. Soit $x \in]0,+\infty[$ et $t \in [x,2x]$, exp est croissante d'où $e^x \leq e^t \leq e^{2x}$, et comme $t > 0$,
$$\frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^{2x}}{t}.$$

Or $x \leq 2x$, on en déduit :

$$e^x \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq f(x) \leq e^{2x} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Mais : $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(2x) - \ln x = \ln 2$, par conséquent, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$e^x \ln 2 \leq f(x) \leq e^{2x} \ln 2.$$

5. On a $\lim\limits_{x \to 0^+} e^x \ln 2 = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{2x} \ln 2 = \ln 2$, grâce à l'encadrement de la question précédente, on en déduit que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ln 2.$$

Donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \ln 2$.

6. Soit $x > 0$, f est C^1 sur $]0, +\infty[$ et continue en 0, donc elle est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]0, x[$ tel que :

$$f(x) - f(0) = f'(c_x)(x - 0) = f'(c_x)x.$$

7. On remarque que $f'(c_x) = e^{c_x} \dfrac{e^{c_x} - 1}{c_x}$. Mais $0 < c_x < x$, d'où $c_x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$, de plus $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, ainsi par composition de limites, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{c_x} - 1}{c_x} = 1$.
Finalement, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(c_x) = 1$.

8. Soit $x > 0$, d'après la question 6, on a $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = f'(c_x)$, ainsi, d'après la question précédente :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1,$$

d'où f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.
De plus, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = e^x \dfrac{e^x - 1}{x}$, d'où $f'(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1 = f'(0)$.
Ainsi f' est continue en 0, comme f est C^1 sur $]0, +\infty[$, on en déduit que f est C^1 sur $[0, +\infty[$.