Université Claude Bernard
Année universitaire 2023 – 2024

Licence de Mathématiques
Analyse 3

Partiel du 15 novembre 2023 - Durée : 2h

`La rédaction est importante, nous en tiendrons compte dans la correction.`

Exercice 1 `Question de cours`

1. Soit $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une fonction strictement croissante.
   Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\varphi(k) \geq k$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle convergente vers un réel ℓ.
   Montrer que toutes les suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers ℓ.

Exercice 2 `Le calcul d'une intégrale par un changement de variable`

En utilisant le changement de variable $t = \sqrt{x-1}$ calculer $\displaystyle\int_5^{10} \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{x-1}}$.

Exercice 3 `Étude d'une suite. Détermination de la borne inférieure et de la borne supérieure d'une partie.`

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n).$$

1. Montrer que pour tout $x \in]0,1]$, il existe $c \in]0,x[$ tel que $\sin x = x \cos c$.
2. En déduire que pour tout $x \in]0,1]$, $\sin x < x$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 < u_n \leq 1$.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
5. Montrer que la partie

$$A = \left\{ 1 - \frac{1}{k+u_n} : k \in \mathbf{N}^*,\ n \in \mathbf{N} \right\}.$$

   admet une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

Exercice 4 `Résolution d'une équation différentielle`

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer la primitive F s'annulant en 0 de la fonction f suivante :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ t & \mapsto & \ln(1+t^2) \end{array}.$$

2. Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle

$$y'(t) - 2ty(t) = e^{t^2} \ln(1+t^2),\ t \in \mathbf{R}.$$

   On donnera l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.

Exercice 5 `Une fonction définie par une intégrale à bornes variables`

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t \end{array}.$$

1. Montrer que f est bien définie sur $]0,+\infty[$.
2. Exprimer f en fonction d'une primitive G de la fonction $t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ sur $]0,+\infty[$.
3. En déduire que f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.
4. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $e^x \ln 2 \leq f(x) \leq e^{2x} \ln 2$.
5. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0. On notera également f ce prolongement défini sur $[0+\infty[$.
6. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, il existe $c_x \in]0,x[$ tel que $f(x) - f(0) = f'(c_x)x$.
7. Montrer que $f'(c_x)$ admet une limite quand x tend vers 0^+.
8. En déduire que f est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.