

Feuille 4 : Intégrales impropres

Exercice 1 Étudier la nature des intégrales impropres suivantes et calculer la valeur des intégrales convergentes :

1. $\int_0^{+\infty} \sin t \, dt$
2. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \, dx$
4. $\int_0^{+\infty} e^{-t} \cos t \, dt$
5. $\int_0^1 \ln x \, dx$
6. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \, dx$
7. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$

Exercice 2 Déterminer si les intégrales impropres suivantes sont absolument convergentes :

1. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} \, dx$
2. $\int_0^1 t \ln t \, dt$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+x^2} \, dx$
4. $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^{1/2}} \, dt$
5. $\int_0^{+\infty} e^{-x} (2 + 3 \cos^9 x) \, dx$
6. $\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{t}\right) \, dt$
7. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \, dx$

Exercice 3 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{x^2 + 8x + 20}$.

1. Pourquoi la fonction f est-elle définie et continue sur $\mathbb{R}$?
2. Prouver que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} f(x) \, dx$ diverge vers $+\infty$.
3. Prouver que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{x \, dx}{(x^2 + 8x + 20)^2}$ converge.

Exercice 4 La fonction gamma.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\Gamma(n+1)$.

Exercice 5 Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que f admet une limite ℓ en $+\infty$.
 - (a) Montrer que si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) \, dt$ converge alors $\ell = 0$.
 - (b) La condition $\ell = 0$ suffit-elle à garantir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) \, dt$?
2. Donner un exemple de fonction continue $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs positives et non bornée (et donc telle que f ne tend pas vers 0 en $+\infty$) telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) \, dt$ converge.

Exercice 6 Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x \ln(2+x^2)} \, dx$
2. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} \, dt$
3. $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln(t)}} \, dt$
4. $\int_0^1 \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^{5/2}} \, dx$
5. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \sin(1/x^2)}{\ln(1+x)} \, dx$
6. $\int_{3/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) \, dt$
7. $\int_0^{+\infty} \frac{(t+1)^{1/4} - t^{1/4}}{t^{1/3}} \, dt$
8. $\int_0^{\pi/2} \frac{t}{e^{\sin t} - 1} \, dt$

Exercice 7 Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^a} \, dt$.

Exercice 8 Discuter, selon les valeurs du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales généralisées suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} \, dt$
2. $\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x}) \, dx$
3. $\int_2^{+\infty} \left(\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x \sqrt[3]{x^3 + \alpha x} \right) \, dx$ où $\alpha \in [-4, +\infty[$.

Exercice 9

1. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^\infty \frac{\ln(t)}{1+t^2} \, dt$ converge.
2. En utilisant un changement de variable, montrer que $\int_0^\infty \frac{\ln(t)}{1+t^2} \, dt = 0$.
3. En déduire que, pour tout $a > 0$, $\int_0^\infty \frac{\ln(t) \, dt}{a^2 + t^2} = \frac{\pi \ln(a)}{2a}$.

Exercice 10 L'objectif de cet exercice est d'étudier $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y} dy$ et de calculer sa valeur.

- Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y} dy$ est convergente.
- On montre maintenant que l'intégrale est semi-convergente.
 - Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin t| \geq \sin^2 t$.
 - Démontrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ est convergente.
 - En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(y)|}{y} dy$ diverge.
- On considère la fonction $f:]0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{1}{y} - \frac{1}{\sin(y)}$.
 - Montrer que f se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
On notera toujours f ce prolongement.
 - En déduire que $\int_0^{\pi/2} f(y) \sin(ny) dy$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)y)}{\sin(y)} dy$.
 - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale J_n converge.
 - Montrer que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y} dy$.

On rappelle que pour tous réels a et b , $\sin a - \sin b = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

- Montrer que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, puis conclure.

Exercice 11 Intégrales de Wallis et intégrale de Gauss.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$.
 - Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
 - En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$1 \leq \frac{W_n}{W_{n+1}} \leq \frac{n+2}{n+1}.$$

- Montrer que la suite $\left(\frac{W_n}{W_{n+1}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
- On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et déterminer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Déduire des questions précédentes $\lim_{n \rightarrow +\infty} nW_n^2$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}W_n$.
- Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a : $\ln(1+x) \leq x$.
 - En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall t \in [0, \sqrt{n}], \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} u du.$$

On pourra poser $t = \sqrt{n} \cos u$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2} u du.$$

On pourra poser $t = \sqrt{n} \cotan(u)$.

- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} W_{2n-2}.$$

- Démontrer la convergence de l'intégrale de Gauss définie par $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et déterminer sa valeur.

Exercice 12

- Justifier que pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2} dt$ converge.

Que pouvez-vous dire dans le cas où $x \leq 0$?

On définit alors la fonction φ sur $\mathbb{R}_+^*$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2} dt.$$

- Montrer que la fonction φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - Déterminer la limite de φ en $+\infty$.
- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^2} du$.
 - En déduire que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer φ' .
 - Retrouver alors le résultat de la question 2.(a).
- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{2}{x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^3} dt.$$

- En déduire un équivalent simple de $\varphi(x)$ quand x tend vers $+\infty$.