

Feuille n° 3 : Intégrales sur un segment

Exercice 1 (Intégrabilité des fonctions monotones)

On considère une fonction croissante $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$.

Soit un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et une subdivision régulière $x_0, \dots, x_n$ du segment $[a, b]$:

$$x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \dots, x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}, \dots, x_n = b.$$

$$\text{On pose } u : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x_i) & \text{si } x_i \leq x < x_{i+1} \text{ et } 0 \leq i < n \\ f(b) & \text{si } x = b \end{cases}$$

$$\text{et } U : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(a) & \text{si } x = a \\ f(x_{i+1}) & \text{si } x_i < x \leq x_{i+1} \text{ et } 0 \leq i < n. \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement u et U .

2. Calculer $\int_a^b u(t) dt$ et $\int_a^b U(t) dt$.

3. En déduire la valeur de $\int_a^b (U - u)(t) dt$.

4. Montrer que f est intégrable.

5. Montrer que la somme de Riemann $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$ converge vers

$$\int_a^b f(t) dt.$$

6. Donner un exemple de fonction monotone sur un segment qui n'est pas continue par morceaux.

Exercice 2 Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction intégrable sur tout segment de $\mathbf{R}$.

1. Montrer que f est bornée sur tout segment de $\mathbf{R}$.

On considère l'application $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

2. Montrer que F est continue.

On considère $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie pour $x \geq 0$ par $g(x) = 1$ et pour $x < 0$ par $g(x) = -1$.

3. Montrer que g n'admet pas de primitive.

4. Montrer que g est intégrable sur tout segment de $\mathbf{R}$.

5. On pose $G : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par $G(x) = \int_0^x g(t) dt$.

Quelle fonction usuelle (non dérivable) retrouve-t-on ?

Exercice 3 On considère une fonction positive et intégrable $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ telle que

$$\int_a^b f(t) dt = 0.$$

1. Montrer que si f est continue en un point $c \in [a, b]$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b] \cap [c - \delta, c + \delta]$, $f(x) \geq f(c)/2$.

2. En déduire que si f est continue alors f est identiquement nulle.

3. Montrer que si f est continue par morceaux alors f est nulle partout sauf en au plus un nombre fini de points.

On considère $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{s'il existe } n \in \mathbf{N}^* \text{ tel que } x = 1/n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. Montrer que g est intégrable et que $\int_0^1 g(t) dt = 0$.

Exercice 4 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue.

Pour $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^1 t^{n-1} f(t) dt$.

1. Montrer que $I_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Effectuer une intégration par parties sur I_n puis montrer que $nI_n \rightarrow f(1)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

3. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Montrer que $\int_0^1 f(t) \sin(nt) dt \rightarrow 0$.

Exercice 5

1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}$ la fraction rationnelle suivante :

$$F(X) = \frac{X^2 + 11}{(X^2 - X - 2)(X^2 + 1)}.$$

2. En déduire l'ensemble des primitives de la fonction $f :]-1, 2[\rightarrow \mathbf{R}$ définie pour

$$x \in]-1, 2[\text{ par } f(x) = \frac{x^2 + 11}{(x^2 - x - 2)(x^2 + 1)}.$$

Exercice 6

1. Calculer $\int_1^{\sqrt{2}} t^2 \ln t dt$.

2. En utilisant le changement de variable $t = \sqrt{1+x}$ calculer $\int_0^1 \ln(1+x) \sqrt{1+x} dx$.

Exercice 7 On note $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi/2 \text{ et } \sin x \leq y \leq \cos x\}$.

1. Représenter graphiquement les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus sur l'intervalle $[0, \pi]$, ainsi que D .
2. Montrer que l'aire de D vaut $\sqrt{2} - 1$.

Exercice 8 Méthode des trapèzes

On considère une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^2 et une subdivision régulière $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ de l'intervalle $[a, b]$.

Rappelons que la méthode des trapèzes consiste à approcher l'intégrale de f sur chacun des sous-intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ par l'intégrale de la fonction affine dont le graphe passe par les points $(x_k, f(x_k))$ et $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$.

1. Rappeler la formule de quadrature de la méthode des trapèzes.

Le but de cet exercice est de démontrer la majoration théorique suivante de l'erreur

$$E_n \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2} \text{ avec } M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

Pour montrer ce résultat, on majore les erreurs commises sur chaque sous-intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ pour k parcourant $\{0, \dots, n-1\}$. Fixons k : l'erreur commise sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ s'écrit

$$\varepsilon_k = \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (g(t) - f(t)) dt \right|$$

où g est la fonction affine vérifiant $g(x_k) = f(x_k)$ et $g(x_{k+1}) = f(x_{k+1})$.

2. Expliciter la formule définissant g .
3. Fixons un réel $t \in]x_k, x_{k+1}[$. Vérifier qu'il existe un réel K tel que la fonction

$$h_t : [x_k, x_{k+1}] \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto g(x) - f(x) + K \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{2}$$

s'annule en t .

4. En utilisant le théorème de Rolle, montrer qu'il existe $c_1 \in]x_k, t[$ et $c_2 \in]t, x_{k+1}[$ tel que $h'_t(c_1) = h'_t(c_2) = 0$.
5. En déduire qu'il existe $c_3 \in]c_1, c_2[$ tel que $h''_t(c_3) = 0$.
6. Vérifier que $K = f''(c_3)$ et en déduire que $g(t) - f(t) = -f''(c_3) \frac{(t - x_k)(t - x_{k+1})}{2}$.
7. Vérifier alors l'inégalité

$$\varepsilon_k \leq \frac{M_2}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k)(x_{k+1} - t) dt.$$

8. Calculer le second membre de cette inégalité (on pourra faire une intégration par partie).
9. Conclure.

Exercice 9

Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n dx$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon \in]0, \pi/2[$ et tout $n \in \mathbf{N}$ on a :

$$(a) \quad 0 \leq \int_0^\varepsilon (\cos x)^n dx \leq \varepsilon;$$

$$(b) \quad 0 \leq \int_\varepsilon^{\pi/2} (\cos x)^n dx \leq \frac{\pi}{2} (\cos \varepsilon)^n.$$

2. En déduire que la suite (I_n) converge vers 0.

Exercice 10 On définit une application $F :]0, 1[\rightarrow \mathbf{R}$ par $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

1. Pour $x \in]0, 1[$, quel est le signe de $F(x)$?
2. Montrer que F est dérivable en tout point de $]0, 1[$ et calculer sa dérivée.
3. Pour $x \in]0, 1[$, montrer que $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} = \ln 2$.
4. Pour $x \in]0, 1[$, montrer les inégalités : $x^2 \ln 2 \leq F(x) \leq x \ln 2$.
5. En déduire l'existence et la valeur des limites $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$.

Exercice 11 Calculer les limites des suites $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ et $(c_n)_{n \geq 1}$ définies pour $n \geq 1$ par

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2}, \quad b_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} \quad \text{et} \quad c_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=0}^n (n^2 + k^2)^{1/n}.$$

Quelques exercices de calculs pour réviser et vous entraîner :

Exercice 12 Calculer, sur un intervalle où le calcul est valable, les primitives des fonctions rationnelles suivantes :

$$\begin{array}{lll} (a) \int \frac{x^2}{1+x^2} dx & (c) \int \frac{dx}{x^2+4} & (e) \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2023} \frac{dx}{x^2} \\ (b) \int \frac{x}{x^2-3x+2} dx & (d) \int \frac{x}{x^2-4x+9} dx & (f) \int \frac{x^3}{x^4+1} dx \end{array}$$

Exercice 13 Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} (a) \int_0^1 x e^{1+x^2} dx & (c) \int_0^1 (x^3+1) e^{-x} dx & (e) \int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx \\ (b) \int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx & (d) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx & \text{(poser } x = \cos \theta) \end{array}$$