Examen du 12 janvier 2024 - Durée : 2h

La rédaction est importante, nous en tiendrons compte dans la correction.

Exercice 1. Questions de cours

1. Soit A une partie non vide majorée de $\mathbf{R}$ et M un majorant de A. On suppose qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de A qui converge vers M. Montrer que $M = \sup A$.
2. Énoncer le théorème fondamental du calcul intégral.

Exercice 2. Des intégrales impropres et des séries

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbf{R}$ pour la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t - \ln(1+t)}{t^a}\,dt$.
2. (a) Déterminer un équivalent simple de $t \mapsto 1 - \left(1 + \dfrac{1}{t^3}\right)^{t^2}$ en $+\infty$.

   (b) En déduire la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{t^3}\right)^{t^2} - 1\right) dt$.
3. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $a_n = (-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

   (a) La série $\sum a_n$ est-elle absolument convergente ?

   (b) La série $\sum a_n$ est-elle convergente ?
4. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)^n}$.

Exercice 3. Étude de la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$

On rappelle que la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente et on notera, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, respectivement sa somme partielle et son reste d'ordre n.

Les questions 1, 2 et 3 de ce problème sont indépendantes. Elles peuvent être admises tout ou partie pour traiter les questions 4(e) et 4(f) à la fin de ce problème.

1. (a) Démontrer que, pour tout $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}.$$

   (b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{1}{n+1} \leq R_n \leq \dfrac{1}{n}$.

   (c) Vérifier ensuite que $R_n = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2. Soit $f : [0,\pi] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$.
   Montrer que
$$\int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. On pose
$$\begin{array}{rccl} g: & [0,\pi/2] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{x}{\sin x} & \text{si } x \in]0,\pi/2] \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$
   Montrer que g est de classe C^1 sur $[0,\pi/2]$.

4. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $t \in [0,\pi]$, on pose $A_n(t) = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$.

   (a) Pour tout $k \geq 1$, calculer les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi} t\cos(kt)dt$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} t^2\cos(kt)dt$.

   (b) En déduire que, pour tout $k \geq 1$,
$$\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)dt = \frac{1}{k^2}.$$

   (c) Vérifier alors que, pour tout $n \geq 1$,
$$\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)A_n(t)dt = S_n - \frac{\pi^2}{6}.$$

On admet[1] que, pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in]0,\pi]$, $A_n(t) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}$.

Soit $h : [0,\pi] \to \mathbf{R}$ définie, pour tout $t \in [0,\pi]$, par $h(t) = \dfrac{t-2\pi}{2\pi} g(t/2)$ où g est la fonction définie à la question 3.

   (d) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $S_n = \dfrac{\pi^2}{6} + \displaystyle\int_0^{\pi} h(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt$.

   (e) En déduire à l'aide des questions 2 et 3, que
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$
   .

   (f) En utilisant la question 1, montrer enfin que
$$S_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. Cette égalité se montre en calculant $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{ikt}$ puis en utilisant une formule trigonométrique