Examen du 12 janvier 2024 - Durée : 2h

La rédaction est importante, nous en tiendrons compte dans la correction.

Exercice 1. Questions de cours

1. Soit A une partie non vide majorée de $\mathbf{R}$ et M un majorant de A. On suppose qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de A qui converge vers M. Montrer que $M = \sup A$.
Solution : Soit M' un autre majorant de A. Pour chaque $n \in \mathbf{N}$, puisque $a_n \in A$ et M' est un majorant de A, on a $a_n \leq M'$. En passant à la limite, on obtient $M \leq M'$. Ainsi, M est le plus petit majorant de A, c'est-à-dire sa borne supérieure.
2. Énoncer le théorème fondamental du calcul intégral.
Solution : Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. Alors pour tout $a \in I$, la fonction $F : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
Remarque : Apprenez correctement les énoncés du cours avec leurs hypothèses et conclusions précises !

Exercice 2. Des intégrales impropres et des séries

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbf{R}$ pour la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-\ln(1+t)}{t^a}\,dt$.
Solution : Soit $a \in \mathbf{R}$.
   — La fonction $t \mapsto \dfrac{t-\ln(1+t)}{t^a}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et l'intégrale considérée n'est impropre qu'en 0 et $+\infty$.
   — Au voisinage de 0, $\ln(1+t) = t - t^2/2 + o(t^2)$ et donc $t - \ln(1+t) = t^2/2 + o(t^2)$. Ainsi, $t - \ln(1+t) \underset{0}{\sim} t^2/2$ et $\dfrac{t-\ln(1+t)}{t^a} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2t^{a-2}}$.
   La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2t^{a-2}}$ étant positive sur $]0,1]$, on déduit de l'équivalent précédent (par le théorème de comparaison) que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-\ln(1+t)}{t^a}dt$ est de même nature que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{a-2}}dt$. L'intégrale de Riemann en question est convergente si et seulement si $a-2<1$ si et seulement si $a<3$.
   Remarque : Il faut utiliser des développements limités. On n'additionne pas les équivalents ! Le raisonnement suivant est **incorrect** : « $\ln(1+t) \underset{0}{\sim} t - t^2/2$ donc $t - \ln(1+t) \underset{0}{\sim} t^2/2$».
   Par ailleurs, si vous concluez qu'une fonction est équivalente à 0, c'est que vous faites un raisonnement erroné ! Par exemple le raisonnement précédent **incorrect** peut aboutir à ce **non sens** :« $\ln(1+t) \underset{0}{\sim} t$ donc $t - \ln(1+t) \underset{0}{\sim} 0$».
   — Étudions maintenant la fonction $t \mapsto \dfrac{t-\ln(1+t)}{t^a}$ au voisinage de $+\infty$. Par croissance comparée, $\dfrac{\ln(1+t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{t-\ln(1+t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et ainsi $t-\ln(1+t) \underset{+\infty}{\sim} t$. On en déduit que $\dfrac{t-\ln(1+t)}{t^a} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{a-1}}$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t-\ln(1+t)}{t^a}dt$ est de même

nature que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{a-1}}\,dt$. Elle est donc convergente si et seulement si $a-1>1$, c'est-à-dire $a>2$.

— Conclusion : l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-\ln(1+t)}{t^a}\,dt$ est convergente si et seulement si $a\in]2,3[$.

2. (a) Déterminer un équivalent simple de $t\mapsto 1-\left(1+\dfrac{1}{t^3}\right)^{t^2}$ en $+\infty$.

Solution :

- *Rédaction rapide (sans doute trop rapide pour un bon nombre d'entre vous)* : au voisinage de $+\infty$,

$$\left(1+\frac{1}{t^3}\right)^{t^2} = e^{t^2\ln(1+1/t^3)} = e^{t^2(1/t^3+o(1/t^3))} = e^{1/t+o(1/t)} = 1+1/t+o(1/t).$$

On en déduit que $1-\left(1+\dfrac{1}{t^3}\right)^{t^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{t}$.

- *Rédaction plus détaillée* : pour $t\in]0,+\infty[$, $1-\left(1+\dfrac{1}{t^3}\right)^{t^2} = 1-e^{t^2\ln(1+1/t^3)}$.

Comme $\dfrac{1}{t^3}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$, on a $\ln(1+1/t^3)=1/t^3+o(1/t^3)$ au voisinage de $+\infty$.
Ainsi, $t^2\ln(1+1/t^3)=1/t+o(1/t)$ au voisinage de $+\infty$.
En posant $u=t^2\ln(1+1/t^3)=1/t+o(1/t)$ et en utilisant le développement limité de l'exponentielle en 0, on obtient au voisinage de $+\infty$, $e^{t^2\ln(1+1/t^3)}=1+1/t+o(1/t)$.
Alors, $1-\left(1+\dfrac{1}{t^3}\right)^{t^2} = 1-e^{t^2\ln(1+1/t^3)} = -1/t+o(1/t)$, c.à.d. $1-\left(1+\dfrac{1}{t^3}\right)^{t^2}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{-1}{t}$.
Remarque : Encore une fois, on n'additionne pas les équivalents !
On ne passe pas non plus à l'exponentielle d'équivalents ! Le raisonnement suivant est **incorrect** : « $t^2\ln(1+1/t^3)\underset{+\infty}{\sim}1/t$ donc $e^{t^2\ln(1+1/t^3)}\underset{+\infty}{\sim}e^{1/t}$ ». Voici un **contre-exemple** : au voisinage de $+\infty$, on a $x^2+x\underset{+\infty}{\sim}x^2$ mais **on n'a pas** $e^{x^2+x}\underset{+\infty}{\sim}e^{x^2}$! !
Enfin, dans cette question, on ne peut pas utiliser le développement limité de $(1+u)^\alpha$ au voisinage de 0 avec $\alpha=t^2$ car t^2 n'est pas une constante !

(b) En déduire la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t^3}\right)^{t^2}-1\right)dt$.

Solution : Par la question précédente, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t^3}\right)^{t^2}-1\right)dt$ est de même nature que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\,dt$, elle est donc divergente.
Remarque : **On n'utilise pas** le symbole équivalent « $\sim$ » pour dire que deux intégrales (ou deux séries) sont de même nature (c'est-à-dire que l'une est convergente si et seulement l'autre l'est).

Par exemple, **on n'écrit pas** « $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t^3}\right)^{t^2}-1\right)dt \underset{+\infty}{\sim} \int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\,dt$ ».

3. Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on pose $a_n=(-1)^n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

(a) La série $\sum a_n$ est-elle absolument convergente ?

Solution : Pour chaque $n \in \mathbf{N}^*$, $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ donc $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \geq 0$ (la fonction sinus étant positive sur $[0, \pi/2]$) et ainsi $|a_n| = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$. Comme $\sin t \underset{0}{\sim} t$, on en déduit que $|a_n| \sim \frac{1}{n}$ et donc, par comparaison avec la série harmonique, la série $\sum a_n$ n'est pas absolument convergente.

Remarque :

Le raisonnement suivant est **incorrect** : « Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $0 < \sin(1/n) \leq 1/n$ et la série $\sum 1/n$ est divergente, donc par le théorème de comparaison la série $\sum \sin(1/n)$ est également divergente. » Voici un **contre-exemple** : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $0 < 1/n^2 \leq 1/n$ et la série $\sum 1/n$ est divergente **mais** la série $\sum 1/n^2$ est convergente.

(b) La série $\sum a_n$ est-elle convergente ?

Solution : Comme pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \geq 0$, la série $\sum a_n$ est une série alternée. De plus, la fonction sin étant croissante sur $[0, 1]$ et la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ étant décroissante, la suite $(|a_n|)$, qui correspond à la suite $\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, est décroissante. De plus, cette suite converge vers 0. Ainsi, la série $\sum a_n$ satisfait le critère de convergence des séries alternées et est donc convergente.

4. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)^n}$.

Solution : Pour tout $n \geq 2$, $\left|\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)^n}\right| \leq \frac{1}{(\ln n)^n}$. Par ailleurs, $\left(\frac{1}{(\ln n)^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, par la règle de Cauchy, la série $\sum \frac{1}{(\ln n)^n}$ converge, et, par comparaison, on conclut que la série $\sum \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)^n}$ est convergente.

Exercice 3. `Étude de la série de terme général` $\frac{1}{n^2}$

On rappelle que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente et on notera, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, respectivement sa somme partielle et son reste d'ordre n.

Les questions 1, 2 et 3 de ce problème sont indépendantes. Elles peuvent être admises tout ou partie pour traiter les questions 4(e) et 4(f) à la fin de ce problème.

1. (a) Démontrer que, pour tout $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}.$$

Solution : Soit $k \geq 2$. Pour $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$ et donc, par croissance de l'intégrale, $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k^2}$. Or, $\int_k^{k+1} \frac{dt}{k^2} = \frac{1}{k^2}$, d'où $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$.

Pour $t \in [k-1, k]$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{t^2}$ et donc, on a de même $\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}$.

Remarque : **On n'écrit pas** « $\dfrac{1}{k^2}$ est décroissante pour tout $k \geq 2$ ». On peut par contre donner/expliciter l'argument suivant : « la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

(b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{1}{n+1} \leq R_n \leq \dfrac{1}{n}$.

Solution : Soit $n \geq 1$. D'après la question précédente, pour tout $m \geq n+1$,

$$\sum_{k=n+1}^{m} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{m} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}.$$

Or, pour tout $m \geq n+1$,

$$\sum_{k=n+1}^{m} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} = \int_{n+1}^{m+1} \frac{dt}{t^2} = \left[\frac{-1}{t}\right]_{n+1}^{m+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1},$$

et

$$\sum_{k=n+1}^{m} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} = \int_n^m \frac{dt}{t^2} = \left[\frac{-1}{t}\right]_n^m = \frac{1}{n} - \frac{1}{m}.$$

Ainsi, pour tout $m \geq n+1$,

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{m}.$$

Or, $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{m+1} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{n+1}$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} R_n$ et $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{n}$, d'où

$$\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}.$$

(c) Vérifier ensuite que $R_n = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Solution : Par la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\dfrac{n}{n+1} \leq nR_n \leq 1$. Ainsi, $nR_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, c'est-à-dire $R_n \sim \dfrac{1}{n}$, ou encore $R_n = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2. Soit $f : [0, \pi] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$.
Montrer que

$$\int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Solution : Soit $n \in \mathbf{N}$. La régularité des fonctions nous permet de procéder à une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt &= \left[-\frac{2}{2n+1} f(t) \cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\right]_0^\pi + \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi f'(t) \cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt \\ &= \frac{2}{2n+1} f(0) + \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi f'(t) \cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt.\end{aligned}$$

Comme pour tout $t \in [0, \pi]$, $\left|\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\right| \leq 1$, il suit, par inégalité triangulaire, que

$$\left|\int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt\right| \leq \frac{2}{2n+1}\left(|f(0)| + \int_0^\pi |f'(t)|\, dt\right).$$

Le terme de droite de cette inégalité tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui permet de conclure.

3. On pose

$$g: \begin{array}{ccc} [0,\pi/2] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{x}{\sin x} & \text{si } x \in]0,\pi/2] \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Montrer que g est de classe C^1 sur $[0,\pi/2]$.

Solution : La fonction sin est de classe C^1 et ne s'annule pas sur $]0,\pi/2]$, donc g est de classe C^1 sur $]0,\pi/2]$ comme quotient de fonctions de classe C^1. Il reste à étudier la régularité de g en 0.

Comme $\sin x \underset{0}{\sim} x$, on a $g(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1 = g(0)$. Ainsi, g est continue en 0.

Au voisinage de 0^+, $\dfrac{g(x)-g(0)}{x} = \dfrac{x-\sin x}{x\sin x} = \dfrac{x-(x-x^3/6+o(x^3))}{x\sin x} \sim \dfrac{x}{6}$.

Il suit que $\dfrac{g(x)-g(0)}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ et donc, que g est dérivable en 0 de dérivée nulle.

Pour $x \in]0,\pi/2]$, $g'(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$.

Ainsi, au voisinage de 0^+, $g'(x) = \dfrac{x+o(x^2)-x(1+o(x))}{\sin^2 x} = \dfrac{o(x^2)}{\sin^2 x} = o(1)$.

Donc $g'(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0 = g'(0)$ et g est alors de classe C^1 sur $[0,\pi/2]$.

Remarque : **On n'écrit pas** « La fonction $\dfrac{x}{\sin x}$ est dérivable sur... » **mais** « La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\sin x}$ (ou la fonction g) est... ».

On n'écrit pas « Pour $x \in]0,\pi/2]$, $\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)' = ...$ » **mais** « Pour $x \in]0,\pi/2]$, $g'(x) = ...$ ».

On a écrit une grosse bêtise si on a écrit « $1' = 0$ donc g est dérivable en 0 de dérivée 0 » ! ! La fonction constante égale à 1 sur un intervalle a bien une dérivée nulle ; par contre la *dérivée d'un réel* est un **non sens** et ici on a juste le fait que $g(0) = 1$. Remarquez que pour un réel x fixé dans $[0,\pi/2]$, on a $g(x) = a$ où a est un (unique) réel (dépendant de x...) mais ce serait également une **grosse bêtise** d'écrire « $g'(x) = a' = 0$ » ! !

4. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $t \in [0,\pi]$, on pose $A_n(t) = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$.

   (a) Pour tout $k \geq 1$, calculer les deux intégrales $\displaystyle\int_0^\pi t\cos(kt)dt$ et $\displaystyle\int_0^\pi t^2\cos(kt)dt$.

   Solution : Soit $k \geq 1$. Par intégrations par parties,

$$\int_0^\pi t\cos(kt)dt = \left[\frac{1}{k}t\sin(kt)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{k}\sin(kt)dt = 0 + \left[\frac{1}{k^2}\cos(kt)\right]_0^\pi = \frac{1}{k^2}\left((-1)^k - 1\right)$$

$$\begin{aligned}\text{et, } \int_0^\pi t^2\cos(kt)dt &= \left[\frac{1}{k}t^2\sin(kt)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2}{k}t\sin(kt)dt \\ &= \left[\frac{2}{k^2}t\cos(kt)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2}{k^2}\cos(kt)dt \\ &= \frac{2\pi}{k^2}(-1)^k - \left[\frac{2}{k^3}\sin(kt)\right]_0^\pi = \frac{2\pi(-1)^k}{k^2}.\end{aligned}$$

   (b) En déduire que, pour tout $k \geq 1$,

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)dt = \frac{1}{k^2}.$$

Solution : Il suit de la question précédente que, pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi t^2\cos(kt)dt - \int_0^\pi t^2\cos(kt)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi(-1)^k}{k^2} - \frac{1}{k^2}\left((-1)^k - 1\right) = \frac{1}{k^2}.\end{aligned}$$

(c) Vérifier alors que, pour tout $n \geq 1$,

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)A_n(t)dt = S_n - \frac{\pi^2}{6}.$$

Solution : Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)A_n(t)dt &= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt)\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)dt + \int_0^\pi \sum_{k=1}^n \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2}\right]_0^\pi + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^3}{6\pi} - \frac{\pi^2}{2}\right) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \\ &= -\frac{\pi^2}{6} + S_n = S_n - \frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

On admet[1] que, pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in]0,\pi]$, $A_n(t) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}$.

Soit $h : [0,\pi] \to \mathbf{R}$ définie, pour tout $t \in [0,\pi]$, par $h(t) = \dfrac{t-2\pi}{2\pi}g(t/2)$ où g est la fonction définie à la question 3.

(d) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $S_n = \dfrac{\pi^2}{6} + \displaystyle\int_0^\pi h(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt$.

Solution : Soit $n \geq 1$. Pour tout $t \in]0,\pi]$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)A_n(t) &= \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= \frac{t-2\pi}{2\pi}\frac{t/2}{\sin(t/2)}\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) = h(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\end{aligned}$$

D'où $S_n = \dfrac{\pi^2}{6} + \displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)A_n(t)dt = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi h(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt$

1. Cette égalité se montre en calculant $\sum_{k=0}^n e^{ikt}$ puis en utilisant une formule trigonométrique

(e) En déduire à l'aide des questions 2 et 3, que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

.

Solution : Par 3, la fonction h est de classe C^1 et par 2, on conclut en passant à la limite dans l'égalité précédente.

(f) En utilisant la question 1, montrer enfin que

$$S_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Solution : $S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - R_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$