

Feuille n° 5 : Séries numériques

Exercice 1 Étudier la nature des séries suivantes, puis calculer leur somme quand c'est possible :

$$\begin{array}{lll} 1. \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+100}; & 3. \sum_{n \geq 0} e^{-n}; & 5. \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n!}; \\ 2. \sum_{n \geq 1} \ln \frac{n}{n+1}; & 4. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+4)}; & 6. \sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n+1)!}. \end{array}$$

Exercice 2 Étudier la nature des séries suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1. \sum_{n \geq 1} \frac{3}{5^n + 2}; & 5. \sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{e^n}; & 9. \sum_{n \geq 0} \frac{n!}{(2n)!}; \\ 2. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n^3 + 10)^{1/4}}; & 6. \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}; & 10. \sum_{n \geq 1} \frac{n^3}{(\ln 2)^n}; \\ 3. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^n}; & 7. \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}; & 11. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 3}}; \\ 4. \sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; & 8. \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^n}; & 12. \sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2 + 1}. \end{array}$$

Exercice 3 Étudier la nature des séries suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1. \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{10}}; & 6. \sum_{n \geq 2} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 1}}{n\sqrt{n-1}}; & 11. \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}; \\ 2. \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n \ln n}; & 7. \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (n+1)}{3^n}; & 12. \sum_{n \geq 1} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right); \\ 3. \sum_{n \geq 1} e^{\frac{1}{\sqrt{2^n - 1}}} - 1; & 8. \sum_{n \geq 1} e^{-\sqrt{n}}; & 13. \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n^3 - 2\sqrt{n} + 3 \ln n}; \\ 4. \sum_{n \geq 1} \frac{\arctan n}{n^2 + 1}; & 9. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n (n+1)}{2n+1}; & 14. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}; \\ 5. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{\sqrt{2n}}; & 10. \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n \ln n}; & 15. \sum_{n \geq 1} e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \end{array}$$

Exercice 4

On pose, pour $n \geq 2$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ et, pour tout $n \geq 1$, $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que u_n et v_n sont équivalentes.
2. Étudier la nature de la série de terme général v_n .
3. (a) Pourquoi le théorème sur les séries alternées ne s'applique-t-il pas à la série de terme général u_n ?
(b) Montrer que la série de terme général u_n diverge.

(Indication : on pourra utiliser un développement limité de $t \rightarrow \frac{1}{1+t}$ en 0)

4. Pourquoi le théorème sur les séries dont les termes généraux sont équivalents ne s'applique pas pour $\sum u_n$ et $\sum v_n$?

Exercice 5 Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n \int_0^1 x^n f(x) dx$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n la somme partielle d'ordre n de la série de terme général u_n .

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $\int_0^1 x^n f(x) dx$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n - \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} f(x) dx.$$

3. Montrer que la série de terme général u_n converge et calculer sa somme.

Exercice 6 [Constante d'Euler]

On considère la suite $(u_p)_{p \geq 1}$ définie, pour tout entier $p \geq 1$, par

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t}.$$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $S_n = \sum_{p=1}^n u_p$.

1. Montrer que, pour tout $p \geq 1$, $0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$.
2. En déduire que la série de terme général u_p converge et que sa somme γ vérifie $0 \leq \gamma \leq 1$.
3. Montrer que, pour tout $p \geq 1$,

$$u_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{p+u} du.$$

4. En déduire que, pour tout $p \geq 2$,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) \leq u_p \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right).$$

5. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$.

Déterminer un équivalent de R_n quand n tend vers $+\infty$.

6. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une relation entre H_n et S_n .
 (b) Montrer que :

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right).$$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = S_n + \frac{1}{2n+2}$.

- (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \gamma - T_n \leq \frac{1}{2n(n+1)}$.
 (b) Déterminer un entier naturel n_0 pour lequel T_{n_0} est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près.

Exercice 7 [Exemples de produits de Cauchy de deux séries]

1. (a) Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est semi-convergente.
 (b) Montrer que le produit de Cauchy de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ par elle-même diverge.
On pourra remarquer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier k compris entre 1 et $n-1$, on a $k(n-k) \leq (n-1)^2$.
2. Soit a et b deux réels. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{a^n}{n!}$ et $b_n = \frac{b^n}{n!}$.
 (a) Montrer que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.
 On note c_n le terme général de la série obtenue quand on fait le produit de Cauchy des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$.
 (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer c_n en fonction de n .
 (c) En déduire que $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Exercice 8 Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$? Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 9 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série de terme général u_n converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

1. Justifier que la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, convergente et déterminer sa limite.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n R_k = (n+1)R_n + \sum_{k=0}^n k u_k.$$

En déduire que si la série $\sum_{n \geq 0} R_n$ converge, alors la série $\sum_{n \geq 0} n u_n$ converge.

3. On suppose que la série $\sum_{n \geq 0} n u_n$ converge.

- (a) Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)R_n$?
 (b) En déduire que la série de terme général R_n converge.