Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2023-2024
Analyse 3

Feuille n° 3 : Intégrales sur un segment

Exercice 1 (Intégrabilité des fonctions monotones)
On considère une fonction croissante $f : [a,b] \to \mathbf{R}$.
Soit un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et une subdivision régulière $x_0, \dots, x_n$ du segment $[a,b]$:

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \frac{b-a}{n},\ \dots,\ x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n},\ \dots,\ x_n = b.$$

.

On pose $u : \begin{array}{rcl} [a,b] & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x_i) \text{ si } x_i \leq x < x_{i+1} \text{ et } 0 \leq i < n \\ f(b) \text{ si } x = b \end{cases} \end{array}$

et $U : \begin{array}{rcl} [a,b] & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(a) \text{ si } x = a \\ f(x_{i+1}) \text{ si } x_i < x \leq x_{i+1} \text{ et } 0 \leq i < n. \end{cases} \end{array}$

1. Représenter graphiquement u et U.
2. Calculer $\displaystyle\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b U(t)\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_a^b (U-u)(t)\,\mathrm{d}t$.
4. Montrer que f est intégrable.
5. Montrer que la somme de Riemann $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
6. Donner un exemple de fonction monotone sur un segment qui n'est pas continue par morceaux.

Exercice 2 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction intégrable sur tout segment de $\mathbf{R}$.

1. Montrer que f est bornée sur tout segment de $\mathbf{R}$.

On considère l'application $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Montrer que F est continue.

On considère $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie pour $x \geq 0$ par $g(x) = 1$ et pour $x < 0$ par $g(x) = -1$.

3. Montrer que g n'admet pas de primitive.
4. Montrer que g est intégrable sur tout segment de $\mathbf{R}$.
5. On pose $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$.
   Quelle fonction usuelle (non dérivable) retrouve-t-on ?

Exercice 3 On considère une fonction positive et intégrable $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

1. Montrer que si f est continue en un point $c \in [a,b]$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [a,b] \cap [c-\delta, c+\delta]$, $f(x) \geq f(c)/2$.
2. En déduire que si f est continue alors f est identiquement nulle.
3. Montrer que si f est continue par morceaux alors f est nulle partout sauf en au plus un nombre fini de points.

On considère $g : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ s'il existe } n \in \mathbf{N}^* \text{ tel que } x = 1/n \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \end{array}$

4. Montrer que g est intégrable et que $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 4 Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue.
Pour $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $I_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Effectuer une intégration par parties sur I_n puis montrer que $nI_n \to f(1)$ lorsque $n \to +\infty$.
3. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Montrer que $\int_0^1 f(t)\sin(nt)dt \to 0$.

Exercice 5

1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}$ la fraction rationnelle suivante :
$$F(X) = \frac{X^2+11}{(X^2-X-2)(X^2+1)}.$$
2. En déduire l'ensemble des primitives de la fonction $f :]-1,2[\longrightarrow \mathbf{R}$ définie pour $x \in]-1,2[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+11}{(x^2-x-2)(x^2+1)}$.

Exercice 6

1. Calculer $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} t^2 \ln t\,\mathrm{d}t$.
2. En utilisant le changement de variable $t = \sqrt{1+x}$ calculer $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 7 On note $D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi/2 \text{ et } \sin x \leq y \leq \cos x\right\}$.

1. Représenter graphiquement les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus sur l'intervalle $[0,\pi]$, ainsi que D.
2. Montrer que l'aire de D vaut $\sqrt{2}-1$.

Exercice 8 Méthode des trapèzes

On considère une fonction $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ de classe C^2 et une subdivision régulière $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de l'intervalle $[a,b]$.

Rappelons que la méthode des trapèzes consiste à approcher l'intégrale de f sur chacun des sous-intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ par l'intégrale de la fonction affine dont le graphe passe par les points $(x_k, f(x_k))$ et $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$.

1. Rappeler la formule de quadrature de la méthode des trapèzes.

Le but de cet exercice est de démontrer la majoration théorique suivante de l'erreur

$$E_n \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2} \text{ avec } M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Pour montrer ce résultat, on majore les erreurs commises sur chaque sous-intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ pour k parcourant $\{0,\dots,n-1\}$. Fixons k : l'erreur commise sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ s'écrit

$$\varepsilon_k = \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} (g(t)-f(t))dt\right|$$

où g est la fonction affine vérifiant $g(x_k) = f(x_k)$ et $g(x_{k+1}) = f(x_{k+1})$.

2. Expliciter la formule définissant g.
3. Fixons un réel $t \in]x_k, x_{k+1}[$. Vérifier qu'il existe un réel K tel que la fonction
$$h_t : [x_k, x_{k+1}] \to \mathbf{R},\ x \mapsto g(x) - f(x) + K\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{2}$$
s'annule en t.
4. En utilisant le théorème de Rolle, montrer qu'il existe $c_1 \in]x_k, t[$ et $c_2 \in]t, x_{k+1}[$ tel que $h_t'(c_1) = h_t'(c_2) = 0$.
5. En déduire qu'il existe $c_3 \in]c_1, c_2[$ tel que $h_t''(c_3) = 0$.
6. Vérifier que $K = f''(c_3)$ et en déduire que $g(t) - f(t) = -f''(c_3)\dfrac{(t-x_k)(t-x_{k+1})}{2}$.
7. Vérifier alors l'inégalité
$$\varepsilon_k \leq \frac{M_2}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t-x_k)(x_{k+1}-t)dt.$$
8. Calculer le second membre de cette inégalité (on pourra faire une intégration par partie).
9. Conclure.

Exercice 9

Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos x)^n \, dx$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon \in]0,\pi/2[$ et tout $n \in \mathbf{N}$ on a :
   (a) $0 \leq \displaystyle\int_0^{\varepsilon} (\cos x)^n \, dx \leq \varepsilon$;
   (b) $0 \leq \displaystyle\int_{\varepsilon}^{\pi/2} (\cos x)^n \, dx \leq \frac{\pi}{2}(\cos\varepsilon)^n$.
2. En déduire que la suite (I_n) converge vers 0.

Exercice 10 On définit une application $F :]0,1[\to \mathbf{R}$ par $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

1. Pour $x \in]0,1[$, quel est le signe de $F(x)$?
2. Montrer que F est dérivable en tout point de $]0,1[$ et calculer sa dérivée.
3. Pour $x \in]0,1[$, montrer que $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln t} = \ln 2$.
4. Pour $x \in]0,1[$, montrer les inégalités : $x^2 \ln 2 \leq F(x) \leq x\ln 2$.
5. En déduire l'existence et la valeur des limites $\lim_{x\to1^-} F(x)$ et $\lim_{x\to0^+} F(x) = 0$.

Exercice 11 Calculer les limites des suites $(a_n)_{n\geq1}$, $(b_n)_{n\geq1}$ et $(c_n)_{n\geq1}$ définies pour $n \geq 1$ par

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}, \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} \quad \text{et} \quad c_n = \frac{1}{n^2}\prod_{k=0}^{n}(n^2+k^2)^{1/n}.$$

Quelques exercices de calculs pour réviser et vous entraîner :

Exercice 12 Calculer, sur un intervalle où le calcul est valable, les primitives des fonctions rationnelles suivantes :

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4}$ (e) $\displaystyle\int \left(1+\frac{1}{x}\right)^{2023}\frac{dx}{x^2}$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4x+9}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^4+1}\,dx$

Exercice 13 Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 xe^{1+x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 (x^3+1)e^{-x}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$ (poser $x = \cos\theta$)

(b) $\displaystyle\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x\ dx}{1+\cos^2 x}$