Feuille n$^{\text{o}}$ 1 : Nombres réels

Inégalités et quantification

Exercice 1 Examiner la véracité des propositions qui suivent.

1. $\forall x \in \mathbf{R}$, $(\forall \varepsilon > 0,\ x \leq \varepsilon) \Rightarrow x \leq 0$.
2. $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $(x \leq \varepsilon \Rightarrow x \leq 0)$.
3. $\forall x \in \mathbf{R}$, $(\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.
4. $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $(|x| \leq \varepsilon \Rightarrow x = 0)$.
5. $\forall (x,y) \in (\mathbf{R}^*)^2$, $\left(x \leq y \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}\right)$.
6. $\forall (x,y) \in (\mathbf{R}^*_-)^2$, $\left(x \leq y \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}\right)$.
7. $\forall (x,y) \in [0,1] \times [0,2]$, $-10 \leq x^2 - xy - 2y^2 \leq 1$.
8. $\forall (x,y) \in [-2,-1] \times [2,4]$, $xy \geq -4$.
9. $\exists (x,y) \in]-2,-1[\times]2,4[$, $xy \geq -4$.
10. $\forall (x,y) \in]-2,7[\times]-4,1[$, $-28 < xy < 8$.
11. $\forall (x,y) \in \big([-3,-2] \cup [3,4]\big) \times \big([-4,-1] \cup [1,2]\big)$, $-12 \leq xy \leq 8$.

Bornes supérieures

Exercice 2 Déterminer (lorsqu'elles existent) les bornes inférieures et supérieures ainsi que les maxima et minima de chacun des ensembles suivants :

$$A = \left\{x \in \mathbf{R}\ :\ x^2 < 2\right\} \quad ; \quad B = \left\{\frac{1}{n}\ :\ n \in \mathbf{N}^*\right\} \quad ; \quad C = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}\ :\ n,p \in \mathbf{N}^*\right\}.$$

$$D = \left\{-y(x^2+1) \colon x \in [-1,0] \text{ et } y \in [-2,-1] \cup [3,4[\right\}.$$

Exercice 3 Soit A et B deux parties non vides de $\mathbf{R}$ telles que $A \subset B$ et B est majorée. Montrer que $\sup A \leq \sup B$.

Exercice 4 Soit I un ensemble non vide et $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ deux familles majorées de réels.

1. Montrer que $(a_i + b_i)_{i\in I}$ est majorée et que $\sup\limits_{i\in I}(a_i + b_i) \leq \sup\limits_{i\in I} a_i + \sup\limits_{i\in I} b_i$.
2. L'inégalité précédente peut-elle être stricte ?
3. On suppose de plus que les familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ sont minorées. Montrer qu'alors la famille $\big(|a_i - b_i|\big)_{i\in I}$ est bornée et que
$$\left|\sup_{i\in I} a_i - \sup_{i\in I} b_i\right| \leq \sup_{i\in I} |a_i - b_i|\,.$$

Exercice 5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels convergente.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée et que $\inf\limits_{n\in\mathbf{N}} u_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} u_n \leq \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} u_n$.
2. Que peut-on dire sur ces inégalités si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement monotone ?
3. Montrer que si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n < \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} u_n$ alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet un maximum.

Exercice 6 Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ une application croissante.

1. Montrer que l'ensemble $E = \{x \in [0;1] \colon f(x) \leqslant x\}$ admet une borne inférieure b.
2. Montrer que $b = \min E$.
3. Montrer finalement que b est un point fixe de f.

Suites adjacentes, monotones, extraites, de Cauchy ...

Exercice 7 Pour tout entier $n \geq 1$, posons $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{nn!}$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.
2. Notons ℓ leur limite. Trouver un intervalle d'extrémités rationnelles, contenant ℓ et de longueur inférieure à $0,002$.
3. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, vérifier que $e = 1 + \ell$ et en déduire une valeur approchée rationnelle de e à $0,002$ près.

Exercice 8

Pour tout entier $n \geq 1$, posons $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n^2}$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes et donc en particulier convergentes.

Exercice 9 Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n}$ pour tout entier $n \geq 0$.

1. Montrer que cette suite est bien définie et strictement minorée par $\sqrt{2}$.
2. Montrer qu'elle est strictement décroissante.
3. Cette suite est-elle convergente ? Et si c'est le cas, calculer sa limite.

Exercice 10 Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels.

1. On suppose que les suites extraites $(u_{2k})_{k\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbf{N}}$ convergent vers la même limite. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.
2. Donner un exemple de suite telle que $(u_{2k})_{k\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbf{N}}$ convergent mais pas $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
3. On suppose que les suites extraites $(u_{2k})_{k\in\mathbf{N}}$, $(u_{2k+1})_{k\in\mathbf{N}}$ et $(u_{3k})_{k\in\mathbf{N}}$ convergent. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

Exercice 11 Soit u une suite de nombres réels. On dit que $\lambda \in \mathbf{R}$ est une *valeur d'adhérence* de u s'il existe une suite extraite de u qui converge vers λ.

1. Déterminer les valeurs d'adhérence d'une suite convergente.
2. Déterminer les valeurs d'adhérences de la suite u définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = (-1)^n$.
3. Donner un exemple d'une suite qui n'admet pas de valeur d'adhérence.
4. Donner un exemple de suite divergente qui n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.

Exercice 12

Soit $0 < a < 1$ un réel et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\left|u_{n+1} - u_n\right| \leq a^n$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy.

Continuité et continuité uniforme

Exercice 13

1. Pourquoi la fonction sinus admet-elle un maximum sur $[0, 2]$?
2. Que vaut-il ? Où est-il atteint ?

Fixons un entier $n \geq 1$. Notons p l'unique entier tel que $\pi/2 \in [2p/n, 2(p+1)/n[$.

3. Pourquoi p existe et est unique ?
4. Montrer que
$$\max_{0\leq k\leq n} \sin\left(\frac{2k}{n}\right) = \max\left\{\sin\left(\frac{2p}{n}\right), \sin\left(\frac{2(p+1)}{n}\right)\right\}.$$
5. Expliquer pourquoi $\pi/2$ ne peut être le milieu du segment $[2p/n, 2(p+1)/n]$. On notera x_n l'extrémité la plus proche de $\pi/2$.
6. En utilisant le fait que : $\forall x \in \mathbf{R}$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, montrer que $\max\limits_{0\leq k\leq n} \sin\left(\frac{2k}{n}\right)$ est atteint en x_n.
7. Montrer que
$$\left|\max_{0\leq k\leq n} \sin\left(\frac{2k}{n}\right) - 1\right| \leq \frac{1}{n}.$$
8. Montrer que $\dfrac{\sin(x_n)-1}{x_n - \frac{\pi}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et en déduire que $\max\limits_{0\leq k\leq n} \sin\left(\frac{2k}{n}\right) - 1 = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
9. En utilisant Taylor-Lagrange, montrer que $\left|\max\limits_{0\leq k\leq n} \sin\left(\frac{2k}{n}\right) - 1\right| \leq \dfrac{1}{2n^2}$.

Exercice 14 Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ deux fonctions continues. On suppose que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) > g(x) > 0$. Montrer qu'il existe $k > 1$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq kg(x)$.

Exercice 15 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbf{R}$.

Exercice 16 Soit $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction. Examiner la signification sur f des propriétés suivantes :

1. $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\exists \eta > 0$, $\forall y \in \mathbf{R}$, $|y - x| < \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$.
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall y \in \mathbf{R}$, $|y - x| < \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$.
3. $\exists \eta > 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall y \in \mathbf{R}$, $|y - x| < \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Exercice 17

1. Montrer que pour tous réels strictement positifs x et y, on a $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$.
2. En déduire que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbf{R}_+$.

Exercice 18

1. Pour $x > 0$, calculer $\ln(2x) - \ln x$.
2. En déduire que $x \mapsto \ln x$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

Exercice 19 Soit k un réel strictement positif, I un intervalle non vide de $\mathbf{R}$ et $f \colon I \to \mathbf{R}$ une fonction. On dit que f est k-lipschitzienne si pour tous $x, y \in I$, on a $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$.

1. Montrer que si f est k-lipschitzienne alors f est uniformément continue.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+|x|}$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbf{R}$. En déduire qu'elle est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.
3. Supposons que f est dérivable sur I et que sa dérivée f' est bornée. Montrer que f est k-lipschitzienne.
4. En déduire que pour chaque $\alpha < 1$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est uniformément continue sur $[1, +\infty[$.

Exercice 20 Montrer que $x \mapsto x \ln x$ est uniformément continue sur $]0, 1]$.

Exercice 21

1. Soit $f :]0, 1] \to \mathbf{R}$ uniformément continue. Montrer que f est bornée.
2. Redémontrer que $x \mapsto \ln x$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbf{R}_+^*$.