Feuille n^o 2 : Équations différentielles

Exercice 1 Résoudre sur $\mathbf{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'(x) = x^2 y(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
2. $y'(x) - x^2 y(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$.
3. $y'(x) - x^2 y(x) = (1 - x^2)e^x$, $x \in \mathbf{R}$.
4. $y'(x) - x^2 y(x) = x^2 + (1 - x^2)e^x$, $x \in \mathbf{R}$.

Exercice 2 Déterminer la solution y définie sur $]0, +\infty[$ du problème suivant :

$$\begin{cases} xy'(x) + y(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}, \ x \in]0, +\infty[\\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Exercice 3

1. Résoudre, en $y \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux fois dérivable, les équations différentielles suivantes :
   (a) Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $y''(t) + y'(t) + y(t) = 3$.
   (b) Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $2y''(t) + y'(t) - 3y(t) = \cos t$.
   (c) Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 3t^2 + 2t$.
   (d) Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = te^t$.
   (e) Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $y''(t) - y(t) = e^t$.
2. Pour les questions 1.(a) et (d), déterminer la solution qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 4 Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad x^2 y'(x) - y(x) = 0, \ x \in I.$$

1. Déterminer les solutions de (E) quand $I =]0, +\infty[$.
2. Déterminer les solutions de (E) quand $I =]-\infty, 0[$.
3. (E) admet-elle des solutions définies sur $\mathbf{R}$?