

Contrôle partiel

Durée : 1h30. Documents, calculatrices et téléphones portables interdits. Justifiez soigneusement vos résultats. Le barème est indicatif.

Les solutions des exercices seront rédigées sur deux copies différentes. Une copie pour les exercices 1 et 2 et une copie pour les exercices 3 et 4. N'oubliez pas d'indiquer vos noms et prénoms sur les deux copies.

Exercice 1 (4 points) Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E .

- a) Rappeler la définition d'une valeur propre de f .
- b) Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ diagonalisable avec exactement deux valeurs propres.

Corrigé a) Une valeur propre est scalaire $\lambda \in K$ pour lequel il existe un vecteur $v \in E$ non nul et vérifiant $f(v) = \lambda v$.

- b) L'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a exactement 2 valeurs propres : son polynôme caractéristique est $(X - 1)^2(X - 2)$. De plus il est diagonalisable puisque sa matrice est diagonale.

Exercice 2 (6 points) On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -6 \\ -2 & 2 & -7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

- a) Montrer que le polynôme caractéristique de A vaut $X^3 + 5X^2 + 7X + 3$ (une réponse sous forme factorisée sera également acceptée).
- b) Déterminer les valeurs propres de A dans $\mathbb{R}$.
- c) Déterminer les sous-espaces propres de A .
- d) Donner une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

Corrigé a) On a

$$\begin{aligned}\chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X-1 & 2 & -6 \\ 2 & X-1 & 6 \\ 2 & -2 & X+7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X+1 & 0 & X+1 \\ 2 & X-1 & 6 \\ 2 & -2 & X+7 \end{vmatrix} = (X+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & X-1 & 6 \\ 2 & -2 & X+7 \end{vmatrix} \\ &= (X+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & X-1 & 4 \\ 2 & -2 & X+5 \end{vmatrix} = (X+1) \begin{vmatrix} X-1 & 4 \\ -2 & X+5 \end{vmatrix} \\ &= (X+1)((X-1)(X+5)+8) = (X+1)(X^2+4X+3)\end{aligned}$$

en ayant fait les opérations suivantes :

- On remplace la ligne L1 par L1+L3.
- On factorise $(X-1)$ dans la première ligne.
- On remplace la colonne C3 par C3-C1.
- On calcule un déterminant par blocs.

b) Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = (X+1)(X^2+4X+3) = (X+1)^2(X+3).$$

Ses racines sont les valeurs propres de A , les valeurs propres de A dans $\mathbb{R}$ sont donc -1 et -3 .

c) On détermine les sous-espaces propres de A . On a

$$\begin{aligned}\text{Ker}(A + I_3) &= \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ -2 & 2 & -6 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 3z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} y - 3z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect}(U, V).\end{aligned}$$

avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La famille (U, V) engendre $E_{-1}(A)$. De plus c'est une

famille libre car les vecteurs U et V ne sont pas colinéaires. La famille (U, V) est donc une base de $E_{-1}(A)$. On a de plus

$$\begin{aligned}E_{-3}(A) &= \text{Ker} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 4 & -6 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = y - 3z, y = z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect}(W)\end{aligned}$$

avec $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (on a remplacé la ligne la ligne L2 dans la matrice par $1/2(L2-L1)$).

Noter que l'égalité $\text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ vient du fait que, -3

étant valeur propre, la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est nécessairement de rang ≤ 2 , une

de ses lignes est donc combinaison linéaire de deux autres. Comme les deux premières lignes ne sont pas colinéaires, la troisième ligne est combinaison des deux premières et on peut donc l'enlever sans modifier le noyau. On a donc $\dim E_{-1}(A) + \dim E_{-3}(A) = 2 + 1 = 3$ donc la matrice A est diagonalisable. De plus (U, V) est une base de $E_1(A)$ et W une base de $E_3(A)$, ainsi (U, V, W) est une base de $\mathbb{R}^3 = E_{-1}(A) \oplus E_{-3}(A)$. La matrice P de passage de la base canonique à la base (U, V, W) est donc inversible et on a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, comme $U, V \in E_{-1}(A)$ et $W \in E_{-3}(A)$, on a

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (5 points) Soit $\sigma = (4157) \circ (2436) \in \mathfrak{S}_7$.

- Décomposer σ en produit de transpositions.
- Déterminer la signature de σ .

Corrigé a) On a

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 6 & 3 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On applique l'algorithme de décomposition en produit de transpositions.

$$\begin{aligned}
 (15)\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 6 & 3 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
 (25)(15)\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\
 (36)(25)(15)\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\
 (46)(36)(25)(15)\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix} \\
 (57)(46)(36)(25)(15)\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix} = (67).
 \end{aligned}$$

On en déduit donc $\sigma = (15)(25)(35)(46)(57)(67)$.

b) On peut décomposer σ en produit de 6 transposition, 6 est pair, donc $\varepsilon(\sigma) = 1$.

Exercice 4 (5 points) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ et v_n deux suites de nombres complexes vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \geq 0, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= -\frac{5}{2}u_n + 3v_n \\ v_{n+1} &= -\frac{9}{2}u_n + 5v_n \end{cases}$$

a) Pour tout $n \geq 0$, donner l'expression de u_n et v_n en fonction de n , u_0 et v_0 .

b) Déterminer pour quelles valeurs de u_0 et v_0 , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Corrigé a) On pose $A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 3 \\ -\frac{9}{2} & 5 \end{pmatrix}$. La relation de récurrence

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

implique donc, par une récurrence immédiate sur $n \geq 0$, que

$$\forall n \geq 0, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Calculons A^n pour tout $n \geq 0$. On commence par calculer le polynôme caractéristique de A .

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X + \frac{5}{2} & -3 \\ X - 5 & 5 \end{vmatrix} = (X + \frac{5}{2})(X - 5) + \frac{27}{2} = X^2 - \frac{5}{2}X + 1.$$

Le discriminant de ce polynôme est

$$\Delta = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4}.$$

Le polynôme χ_A a donc exactement deux racines qui sont $\frac{1}{2}(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}) = 2$ et $\frac{1}{2}(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$. Ainsi la matrice A est diagonalisable. Cherchons une base de diagonalisation de cette matrice. On a

$$E_2(A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & 3 \\ -\frac{9}{2} & 3 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et

$$E_{1/2}(A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En posant $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, on a donc $A = PDP^{-1}$ et $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \geq 0$. Calculons l'inverse de P^{-1} . On obtient

$$P^{-1} = - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & \frac{1}{2^n} \\ 3 \cdot 2^n & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + \frac{3}{2^n} & 2^{n+1} - \frac{1}{2^{n-1}} \\ -3 \cdot 2^n + \frac{3}{2^n} & 3 \cdot 2^n - \frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix}.$$

On en déduit, pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{cases} u_n &= (-2^{n+1} + \frac{3}{2^n})u_0 + (2^{n+1} - \frac{1}{2^{n-1}})v_0 = 2^{n+1}(-u_0 + v_0) + \frac{1}{2^n}(3u_0 - 2v_0) \\ v_n &= (-3 \cdot 2^n + \frac{3}{2^n})u_0 + (3 \cdot 2^n - \frac{1}{2^{n-1}})v_0 = 2^n(-3u_0 + 3v_0) + \frac{1}{2^n}(3u_0 - 2v_0) \end{cases}.$$

- b) Comme $\frac{1}{2^n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on a $u_n \sim (-u_0 + v_0)2^{n+1}$ quand n tend vers $+\infty$ si $-u_0 + v_0 \neq 0$. Par contre $u_n \sim (3u_0 - 2v_0)2^{-n}$ si $u_0 + v_0 = 0$, on en conclut que (u_n) tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si $-u_0 + v_0 = 0$.