Correction ou Indication sur Entraînement hivernal

Diagonalisation.

Exercice 1 1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -6 \\ -3 & -4 & 3 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ *une matrice carrée.*

i) *Calculer les valeurs propres de A.*
Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = (X+1)(X-2)^2$, d'où les valeurs propres de la matrice A sont -1 et 2.

ii) *Pour chaque valeur propre λ de A, calculer le rang de la matrice $A - \lambda \mathbf{1}_3$.*
$\mathrm{rang}(A + \mathbf{1}_3) = 2$ *et* $\mathrm{rang}(A - 2\mathbf{1}_3) = 1$.

iii) *En déduire que la matrice A est diagonalisable.*
D'après la question précédente (et le théorème de rang), $\dim E_{-1}(A) = 3 - 2 = 1$ *et* $\dim E_2(A) = 3 - 1 = 2$ *ainsi les multiplicités algébrique et géométrique de chaque valeur propre coïncident. Donc, la matrice A est diagonalisable.*

iv) *Donner une base $\mathcal{B}$ formée des vecteurs propres.*
Par exemple, on a

$$E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \qquad E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right),$$

donc, on peut prendre $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

v) *Donner une matrice de passage P et la matrice diagonale D vérifiant $D = P^{-1}AP$.*
Posons $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. *On a* $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. *Ensuite, on considère le système d'équations différentielles suivant*

$$\begin{array}{rrrr} x'(t) = & 8x(t)+ & 12y(t)+ & -6z(t) \\ y'(t) = & -3x(t)- & 4y(t)+ & 3z(t) \\ z'(t) = & 3x(t)+ & 6y(t)- & z(t) \end{array}$$

avec les conditions initiales $x(0) = 2, y(0) = 0, z(0) = 1$.

i) *Exprimer le vecteur* $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *dans la base $\mathcal{B}$.*

Par calcul direct, on a $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

ii) En déduire la solution du système d'équations différentielles ci-dessus.
D'après la Question 1. v), on a

$$\exp(tA) = P\exp(tD)P^{-1} = P\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Notons que la question précédente implique $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, *on obtient*

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \exp(tA)\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} &= \exp(tA)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (P\exp(tD)P^{-1})P\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= P\exp(tD)\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-t} + 4e^{2t} \\ e^{-t} - e^{2t} \\ -e^{-t} + 2e^{2t} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Exercice 2 *Soit* $A = \begin{pmatrix} -13 & 10 & 10 \\ 15 & -8 & -10 \\ -30 & 20 & 22 \end{pmatrix}$. *Ici, on va calculer* A^n $(n \in \mathbb{Z})$ *avec deux manières différentes.*

1. *Déterminer le rang de la matrice* $A - 2\mathbf{1}_3$.
   Par définition, $A - 2\mathbf{1}_3 = \begin{pmatrix} -15 & 10 & 10 \\ 15 & -10 & -10 \\ -30 & 20 & 20 \end{pmatrix}$, *d'où* $\operatorname{rang}(A - 2\mathbf{1}_3) = 1$.
2. *En déduire le polynôme caractéristique* $\chi_A(X)$ *de* A.
   D'après la Question 1., la multiplicité géométrique associée à la valeur propre 2 est 2, d'où la multiplicité algébrique de 2 est au moins 2. Notons la troisième valeur propre de la matrice A *par* λ. *Alors, comme* $\mathrm{Tr}(A) = 2\cdot 2 + \lambda = (-13) + (-8) + 22 = 1$, *on obtient* $\lambda = -3$ *(voir le petit supplément de cours ajouté à la fin du poly). On en déduit que* $\chi_A(X) = (X+3)(X-2)^2$.
3. *Montrer que la matrice* A *est diagonalisable.*
   D'après la question précédente, on voit que, pour chaque valeur propre, la multiplicité algébrique et la multiplicité géométrique sont les mêmes, d'où la matrice A *est diagonalisable.*
4. *Calculer* A^n *pour* $n \in \mathbb{Z}$ *avec l'aide*
   i) d'une diagonalisation de la matrice A*, et*
   Par calcul direct, on a

$$E_{-3} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right), \qquad E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. *On a* $D := P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. *Ces matrices sont inversibles, en particulier, on a* $D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$. *On en déduit que, pour tout* $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} A^n = & PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(-3)^{n+1} & -2(-3)^n & -2(-3)^n \\ -2^n & 2^n & 2^n \\ 6 \cdot 2^n & -2^{n+2} & -5 \cdot 2^n \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} -(-3)^{n+1} - 2^{n+1} & -2(-3)^n + 2^{n+1} & -2(-3)^n + 2^{n+1} \\ (-3)^{n+1} + 3 \cdot 2^n & 2(-3)^{n+1} - 2^n & 2(-3)^n - 2^{n+1} \\ -2(-3)^{n+1} - 3 \cdot 2^{n+1} & -4(-3)^n + 2^{n+2} & -4(-3)^n + 5 \cdot 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

*ii)** *du reste de la division euclidienne de* X^n *par* $\chi_A(X)$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.
On effectue la division euclidienne de X^n *par* $\chi_A(X)$. *Soit* $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ *l'unique couple de polynômes vérifiant tel que* $X^n = \chi_A(X)Q(X) + R(X)$ *et* $\deg(R) < 3$. *Le Théorème de Cayley–Hamilton, implique que* $A^n = \chi_A(A)Q(A) + R(A) = R(A)$. *Donc, il suffit de déterminer le polynôme* R. *Notons* $R(X) = aX^2 + bX + c$. *Comme* -2 *est racine simple de* χ_A *et* 2 *racine double, il paraît judicieur d'évaluer* R *en* -3, *en* 2 *et* R' *en* 2. *Comme* $\chi_A(X) = (X+3)(X-2)^2$, *cela donne*

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = (-3)^n, \\ 4a + 2b + c = 2^n, \\ 4a + b = n \cdot 2^{n-1}. \end{cases}$$

On en déduit que

$$a = \frac{1}{25}((-3)^n + (5n-2)2^{n-1}), \qquad b = \frac{1}{25}(-4(-3)^n + (5n+8)2^{n-1}),$$
$$c = \frac{1}{25}(4(-3)^n + (-30n+42)2^{n-1}).$$

Exercice 3 *Soit* $a \in \mathbb{C}$ *et soit* $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$.

1. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice* A *soit inversible.*
   Comme $\det(A) = a^3 - 4a = a(a+2)(a-2)$, *une condition nécessaire et suffisante est* $a \neq 0, \pm 2$.
2. *Supposons que* A *est inversible. Calculer* A^n *pour* $n \in \mathbb{Z}$.
   Le polynôme caractéristique de A *vaut* $(X-a)(X-(a+2))(X-(a-2))$ *et est scindé à racines*

simples. La matrice A est donc diagonalisable. On calcule :

$$E_{a+2} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right), \qquad E_a = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right), \qquad E_{a-2} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right).$$

Posons $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$. *On a* $D := P^{-1}AP = \begin{pmatrix}a+2 & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a-2\end{pmatrix}$. *On a alors* $A^n = PD^nP^{-1}$ *et on déduit, pour* $n \in \mathbb{Z}$,

$$A^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}(a+2)^n + 2\cdot a^n + (a-2)^n & (a+2)^n - (a-2)^n & (a+2)^n - 2\cdot a^n + (a-2)^n\\ 2(a+2)^n - 2(a-2)^n & 2(a+2)^n + 2(a-2)^n & 2(a+2)^n - 2(a-2)^n\\ (a+2)^n - 2\cdot a^n + (a-2)^n & (a+2)^n - (a-2)^n & (a+2)^n + 2\cdot a^n + (a-2)^n\end{pmatrix}.$$

Trigonalisation.

Exercice 4 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 13 & -7 \\ -5 & 19 & -10 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer les valeurs propres.*
   Le polynôme caractéristique de la matrice A est $\chi_A(X) = (X-2)(X-1)^2$, d'où les valeurs propres de A sont 1 et 2.
2. *Pour chaque valeur propre λ, déterminer son espace caractéristique F_λ.*
   On a $\dim F_1(A) = 2$ et $\dim F_2(A) = 1$. Notons que $(A - \mathbf{1}_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. le sous-espace caractéristique F_1 est donné par $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$. Pour la valeur propre 2, le sous-espace caractéristique F_2 coïncide avec le sous-espace propre $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.
3. *Trigonaliser A.*
   D'abord, on pose $b_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ qui forme une base de $F_2 = E_2$. Ensuite, on sélectionne une base de F_1. Comme $E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$, par exemple, le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \in F_1$ n'appartient pas à E_1. Alors, posons $b_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $b_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. En particulier, avec la matrice $P = \begin{pmatrix} b_1' & b_2' & b_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, on obtient $T := P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il reste à déterminer la valeur de x. On peut utiliser l'égalité $PT = AP$ pour trouver $x = -1$.
4. *Donner une formule de A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.*
   Les matrices I_2 et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ commutent, donc pour tout pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En utilisant la formule de Cramer pour inverser T^n, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'où

$$A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n - n & -2^{n+1} + 5n + 2 & 2^n - 3n - 1 \\ -2^n - 2n + 1 & 2^{n+1} + 10n - 1 & -2^n - 6n + 1 \\ -2^{n+1} - 3n + 2 & 2^{n+2} + 15n - 4 & -2^{n+1} - 9n + 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice A a une racine triple, disons λ.*
   Par calcul direct, on a $\chi_A(X) = (X-1)^3$.
2. *Calculer* $\operatorname{rang}(A - \lambda \mathbf{1}_3)$, *et décrire la réduction de Jordan de A.*
   Posons $E = \mathbb{R}^3$. Comme $A - \mathbf{1}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & -2 \\ -4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rang}(A - \mathbf{1}_3) = 2$, *d'où* $\dim E_1 = 1$. *On calcule de même que* $\operatorname{rang}((A-\mathbf{1}_3)^2) = 1$. *Ainsi $(A - \mathbf{1}_3)$ est nilpotente d'indice 3. On a donc* $\dim \operatorname{Ker}(A - \mathbf{1}_3)^i = i$ $(i = 1, 2, 3)$. *Ceci implique qu'il existe une matrice carrée P de taille 3 telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

Exercice 6 *Soit $E \in \mathbb{R}$ donné. On considère le système récurrent pour une suite bi-laterale $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes,*

$$Eu_n = u_{n+1} + u_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

On s'interesse à la question si les solutions du système sont bornées. Ici, une solution $(u_n)_n$ de (1) est dite bornée, s'il existe un $C > 0$ t.q. $|u_n| \le C$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

1. *Déterminer une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ t.q. l'équation matricielle*
   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \tag{2}$$
   est satisfaite pour tout $n \in \mathbb{Z}$ si et seulement si $(u_n)_n$ satisfait (1).
   D'après l'équation (1), on a
   $$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Eu_n - u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix},$$
   on en déduit que $A = \begin{pmatrix} E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ convient.
2. *Déterminer les valeurs propres de A.*
   Le polynôme caractéristique de la matrice A est $\chi_A(X) = X^2 - EX + 1$, donc les valeurs propres de A sont $\dfrac{E \pm \sqrt{E^2-4}}{2}$.
3. *Pour quelles valeurs de E est-ce que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$?*
   Lorsque le discriminant $E^2 - 4$ est non nul, i.e., $E \neq \pm 2$, la matrice A est diagonalisable, car elle possède 2 valeurs propres distinctes. Lorsque $E = \pm 2$, la matrice A n'est pas diagonalisable. En effet si c'était le cas, ce serait une matrice diagonalisable avec une seule valeur propre, c'est-à-dire une matrice scalaire. Or la matrice A n'est pas scalaire.
4. *Pour quelle valeurs de E est-ce que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$?*
   Lorsque le discriminant $E^2 - 4$ est strictement positif, i.e., $|E| > 2$, la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, car elle possède 2 valeurs propres réelles et distinctes. Lorsque $E = \pm 2$, la matrice

A n'est pas diagonalisable comme mentionné dans la réponse précédente. Lorsque $|E| < 2$, la matrice ne possède pas de valeur propre réelle, elle n'est donc pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

5. *Déterminer les solutions du système récurrent pour $|E| > 2$. En déduire qu'aucune solution non-nul pour $|E| > 2$ est bornée.*
La solution générale de la récurrence (1) est

$$u_n = C_+ \left(\frac{E + \sqrt{E^2 - 4}}{2}\right)^n + C_- \left(\frac{E - \sqrt{E^2 - 4}}{2}\right)^n \qquad C_\pm \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Notons que

$$0 < \frac{E - \sqrt{E^2 - 4}}{2} < 1 < \frac{E + \sqrt{E^2 - 4}}{2} \qquad \text{si} \quad E > 2$$

et que

$$\frac{E - \sqrt{E^2 - 4}}{2} < -1 < \frac{E + \sqrt{E^2 - 4}}{2} < 0 \qquad \text{si} \quad E < -2,$$

il est clair que, tant que $(C_+, C_-) \neq (0, 0)$, au moins une des deux limites $\lim_{n \to \pm\infty} |u_n|$ diverge. On en déduit qu'aucune solution non-triviale de l'équation (1) n'est bornée.

6. *Déterminer les solutions du système récurrent pour $|E| < 2$. En déduire que toute solution pour $|E| < 2$ est bornée.*
Lorsque $|E| < 2$, les valeurs propres de la matrice A sont des nombres complexes $\dfrac{E \pm i\sqrt{4 - E^2}}{2}$ de norme 1. On en déduit que la solution générale (3) de l'équation (1) vérifie

$$|u_n| \leq |C_+| + |C_-|,$$

i.e., elle est forcément bornée.

7. *Déterminer les solutions du système récurrent pour $|E| = 2$. Sont elles bornées ? Supposons dans un premier temps que $E = 2$. Alors, la seule valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est 1, et $E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \subset F_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. La solution générale est $u_n = An + B$ avec $A, B \in \mathbb{C}$, d'où les seules solutions bornées sont les suites constantes de la forme $u_n = C$. Supposons que $E = -2$. Alors, la seule valeur propre de $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est -1, et $E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \subset F_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. La solution générale est $u_n = (-1)^n(An + B)$ avec $A, B \in \mathbb{C}$, donc les seules solutions bornées sont de la forme $u_n = C(-1)^n$ pour une constante C.*

Exercice 7 *Soit u un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension 5.*

1. *Justifier qu'il existe une base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ de E dans laquelle u est représentée par une des matrices suivantes :*

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

2. *Pour chaque matrice ci-dessus :*
   i) *Donner le polynôme minimal.*
   Ce sont X, X^2, X^2, X^3, X^3, X^4, X^5, respectivement.
   ii) *Identifier les blocs de Jordan.*
   Voir les parties en bleu de chaque matrice.
   iii) *Identifier les sous-espaces cycliques sous-jacentes les blocs Jordan en donnant une base (en fonction des b_i $(1 \leq i \leq 5)$).*
   Ils sont décrits comme suit :
      i. *1ère matrice :* $\mathrm{Vect}(b_1), \mathrm{Vect}(b_2), \mathrm{Vect}(b_3), \mathrm{Vect}(b_4), \mathrm{Vect}(b_5)$.
      ii. *2ème matrice :* $\mathrm{Vect}(b_1, b_2), \mathrm{Vect}(b_3), \mathrm{Vect}(b_4), \mathrm{Vect}(b_5)$.
      iii. *3ème matrice :* $\mathrm{Vect}(b_1, b_2), \mathrm{Vect}(b_3, b_4), \mathrm{Vect}(b_5)$.
      iv. *4ème matrice :* $\mathrm{Vect}(b_1, b_2, b_3), \mathrm{Vect}(b_4), \mathrm{Vect}(b_5)$.
      v. *5ème matrice :* $\mathrm{Vect}(b_1, b_2, b_3), \mathrm{Vect}(b_4, b_5)$.
      vi. *6ème matrice :* $\mathrm{Vect}(b_1, b_2, b_3, b_4), \mathrm{Vect}(b_5)$.
      vii. *7ème matrice :* $\mathrm{Vect}(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$.
   iv) *En déduire une partition de la base $\mathcal{B}$ en chaines de Jordan.*
   Elles sont décrits comme suit :
      i. *1ère matrice :* $(b_1) \times (b_2) \times (b_3) \times (b_4) \times (b_5)$.
      ii. *2ème matrice :* $(b_1, b_2) \times (b_3) \times (b_4) \times (b_5)$.
      iii. *3ème matrice :* $(b_1, b_2) \times (b_3, b_4) \times (b_5)$.
      iv. *4ème matrice :* $(b_1, b_2, b_3) \times (b_4) \times (b_5)$.
      v. *5ème matrice :* $(b_1, b_2, b_3) \times (b_4, b_5)$.
      vi. *6ème matrice :* $(b_1, b_2, b_3, b_4) \times (b_5)$.
      vii. *7ème matrice :* $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$.