Feuille d'entraînement pour le contrôle partiel

Exercice 1 Soit $n \geqslant 1$ un entier et soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

a) Rappeler la définition d'un sous-espace propre de A.

b) Montrer que A est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de A.

Exercice 2 Soit $\sigma = (1456) \circ (234) \in \mathfrak{S}_6$.

a) Déterminer σ et σ^{-1}, c'est-à-dire calculer $\sigma(i)$ et $\sigma^{-1}(i)$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant 6$.

b) Décomposer σ en produit de transpositions.

c) Déterminer la signature de σ.

Exercice 3 On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 6 & -4 & 0 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

a) Déterminer les valeurs propres de A dans $\mathbb{R}$.

b) Déterminer les sous-espaces propres de A.

c) Donner une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

d) (*) Existe-t-il des fonctions non toutes nulles $x, y, z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\begin{cases} x'(t) &= 5x(t) - 3y(t) \\ y'(t) &= 6x(t) - 4y(t) \\ z'(t) &= 6x(t) - 3y(t) - z(t) \end{cases} \qquad \lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \ \lim_{t\to\infty} y(t) = 0, \ \lim_{t\to\infty} z(t) = 0.$$

Exercice 4 On considère la matrice carrée réelle $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ de taille n définie par

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ 1 & \text{si } i < j \\ i & \text{si } i = j \end{cases}.$$

Autrement dit $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$.

a) Pour tout $n \geqslant 1$, déterminer le déterminant de A_n ainsi que les valeurs propres de A_n.

b) La matrice A_n est-elle diagonalisable ?