Feuille 4 : Limites de fonctions et Continuité

Exercice 1. Soit $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq -1 \\ x^2+1 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \sin(x/4) & \text{si } x > 0. \end{cases}$

1. Dessiner le graphe de f.
2. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ c) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ e) $\lim_{x\to \pi^-} f(x)$

b) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ d) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ f) $\lim_{x\to \pi^+} f(x)$

Est-ce que les limites suivantes existent ? Si oui, donner leur valeur.

a) $\lim_{x\to -1} f(x)$ b) $\lim_{x\to 0} f(x)$ c) $\lim_{x\to \pi} f(x)$

Exercice 2. Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$ 2) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ 3) $\lim_{x\to 4} \dfrac{2x+5}{x-4}$

4) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{3x^9-17}{x^7}$ 5) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{3x^3-5x^2+7}{8+2x-5x^3}$ 6) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+3}{x^3+2}$

7) $\lim_{x\to 1} |x-1|$ 8) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{|x-1|}$ 9) $\lim_{x\to 5} \dfrac{1}{|x-1|}$

10) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+x}-1}$ 11) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^2}\right)$ 12) $\lim_{x\to \infty} \sqrt{x^2+2x+5}-x$

13) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$ 14) $\lim_{x\to 0} x\sin(\dfrac{1}{x})$ 15) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+\sin x}{x^2+\cos x}$

16) $\lim_{x\to 0+} x^x$ 17) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{1+2\sin(x)}{1+\sqrt{x}}$ 18) $\lim_{x\to +\infty} e^{x-\sin x}$

Exercice 3. On rappelle que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et que $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.
Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}$ 2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}$ 3) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

4) $\lim_{x\to 1/2} \dfrac{\cos(\pi x)}{1-2x}$ 5) $\lim_{x\to 1/2} (2x^2+x-1)\tan(\pi x)$ 6) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$

7) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}$ 8) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln^3 x$ 9) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\exp(\ln^2 x)}{x^n}$, $n\in\mathbb{Z}$

Exercice 4. Dans cet exercice, la notation $E(x)$ désigne la partie entière d'un réel x. Calculer :

1) $\lim_{x\to 0} E(x+1)$ 2) $\lim_{x\to 0} xE(\dfrac{1}{x})$ 3) $\lim_{x\to +\infty} xE(\dfrac{1}{x})$

1) Si $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)-5}{x-2} = 5$, trouver $\lim_{x\to 2} f(x)$. 2) Si $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = -2$, trouver $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

Exercice 5.

Exercice 6. Étudier la continuité à gauche, la continuité à droite et la continuité des fonctions suivantes en chaque point de leur domaine de définition.

1. $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$.

Exercice 7. 1. Déterminer les valeurs de $k \in \mathbb{R}$ pour lesquelles f_k définie par $f_k(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ k - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ est une fonction continue.

2. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \dfrac{1+x^3}{1+x}$. Trouver une application continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g|_{\mathbb{R}\setminus\{-1\}} = f$

Exercice 8. Montrer que l'équation $x^3 - 15x + 1 = 0$ a trois solutions dans l'intervalle $[-4, 4]$.

Exercice 9. Montrer qu'il existe $x \in [3\pi/4, \pi]$ tel que

$$\tan x + \frac{x}{3} = 0.$$

Exercice 10. Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la fonction $f_n : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_n(x) = x^n - x - 1$$

1. Soit $n \geq 2$, montrer qu'il existe un unique $x_n > 1$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Soit $n \geq 2$, montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$.
3. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et converge vers une limite l.
4. Déterminer l.

Exercice 11. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et f une application de $[a, b]$ vers $[a, b]$.

1. On suppose que pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ on a

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

Montrer que f est continue. En déduire qu'il existe au moins un $u \in [a, b]$ tel que $f(u) = u$. On pourra utiliser la fonction g de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$.

2. On suppose maintenant que pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ avec $x \neq y$ on a

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

Montrer qu'il existe un unique $u \in [a, b]$ tel que $f(u) = u$.

Exercice 12. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors f est surjective.

Exercice 13. Vrai ou faux ?

1. Si f est continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$, alors $f([a, b])$ est un intervalle fermé borné.
2. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert borné.
3. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert, mais pas forcément borné.
4. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle, mais pas forcément ouvert ni borné.

Exercice 14. 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer que f est bornée.

2. En utilisant le résultat précédent, calculer la limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x(\sin^8 x + \cos^{14} x)}.$$

Exercice 15. Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - (x+1)$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$

4) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$ 5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln^2 x - \sqrt{x}$ 6) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$

7) $\lim\limits_{x\to1+} \ln x \ln(\ln x)$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$ 9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\ln x + x}$

Exercice 16. Soit f une fonction décroissante sur $]0;+\infty[$ telle que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a l'inégalité : $f(x) \geq 0$.

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique qui admet une limite en $+\infty$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 18.
1. Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier impair et, pour chaque $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ a_i un réel. Montrer que l'équation $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ admet au moins une solution réelle.
2. Donner un contre-exemple pour le cas où n est pair.

Exercice 19. Supposons que f est une fonction continue sur $[0, 1]$ et que $0 \leq f(x) \leq 1$ pour chaque $x \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe un $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 20. Étudier la continuité de la fonction $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin(\pi/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, sur le domaine de définition.

Exercice 21. Étudier la continuité à gauche, la continuité à droite et la continuité en chaque point de son domaine de définition de la fonction : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xE(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$, où E dénote la partie entière.

Exercice 22. Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles g_m définie par $g_m(x) = \begin{cases} x - m & \text{si } x \leq 3 \\ 1 - mx & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ est une fonction continue.

Exercice 23. Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues dont l'image est contenue dans $\mathbb{Z}$? dans $\mathbb{Q}$?

Exercice 24. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ supposée bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ supposée continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Exercice 25. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I.
1. Soit $a \in I$. Donner une raison pour laquelle :
$$(\lim_{x\to a} f(x) = f(a)) \Rightarrow (\lim_{x\to a} |f(x)| = |f(a)|)$$
2. En utilisant la question précédente, montrer que si f et g sont continues, alors $\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ l'est aussi.