Feuille 2 : Fonctions et fonctions usuelles
Correction

Exercice 1 (Injection, surjection, bijection)**.**

Les fonctions suivantes sont-elles des injections ? Des surjections ? Des bijections ?

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_1(x) = x^2 + 1$.
2. $f_2 : \mathbb{R} \to [1, +\infty[$ définie par $f_2(x) = x^2 + 1$
3. $f_3 : [-4, -2] \cup [0, 1] \to [1, +\infty[$, définie par $f_3(x) = x^2 + 1$.
4. $f_4 : \mathbb{R}\backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$, définie par $f_4(x) = \tan(x)$.
5. $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ définie par $f_5(x) = e^x$.
6. $f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ définie par $f_6(x) = e^{x^2}$.

<u>**Correction**</u>

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_1(x) = x^2 + 1$ n'est ni injective, ni surjective, ni bijective.
2. $f_2 : \mathbb{R} \to [1, +\infty[$ définie par $f_2(x) = x^2 + 1$ est surjective, mais pas injective ni bijective.
3. $f_3 : [-4, -2] \cup [0, 1] \to [1, +\infty[$, définie par $f_3(x) = x^2 + 1$ est injective mais pas surjective ni bijective.
4. $f_4 : \mathbb{R}\backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$, définie par $f_4(x) = \tan(x)$ est surjective mais pas injective ni bijective.
5. $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ définie par $f_5(x) = e^x$ est injective, surjective et bijective. .
6. $f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ définie par $f_6(x) = e^{x^2}$ est surjective mais pas injective ni bijective.

Exercice 2 (Homographies)**.**

Soient f, g et h les fonctions définies par :

$$f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R} \qquad g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \qquad h : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x}{x-1} \qquad x \mapsto \frac{1}{x} \qquad x \mapsto \frac{1}{x-1}$$

On note $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ leurs courbes représentatives.

1. Trouver 3 réels a, b et c tels que
$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \qquad \frac{x}{x-1} = a + \frac{b}{x-c}.$$
2. On note T_1 la translation de vecteur $\vec{u} = (1, 0)$ dans le plan.
Vérifier que l'image de $\mathcal{C}_g$ par T_1 est la courbe représentative de la fonction h.
3. On note T_2 la translation de vecteur $\vec{v} = (0, 1)$ dans le plan.
Vérifier que l'image de $\mathcal{C}_h$ par T_2 est la courbe représentative de la fonction f.
4. En déduire une transformation affine qui envoie $\mathcal{C}_g$ sur $\mathcal{C}_f$.

<u>**Correction**</u>

1. Soient a, b et c trois réels.
Pour tout réel x différent de c, on a :
$$a + \frac{b}{x-c} = \frac{ax + (b - ac)}{x-c}$$
On remarque alors que si $a = 1$, $c = 1$, et $b = 1$, on a, pour tout x différent de 1 :
$$\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

2. On procède par double inclusion :
   — Soit $M(x, y)$ un point de $\mathcal{C}_g$. On a donc $y = g(x) = 1/x$.
   Notons M_1 l'image de M par T_1 : les coordonnées de M_1 sont $(x + 1, 1/x)$.
   Or $h(x + 1) = 1/x$, donc M_1 appartient à $\mathcal{C}_h$.
   On a donc montré que $T_1(\mathcal{C}_g)$ est inclus dans $\mathcal{C}_h$.
   — Réciproquement, soit $N(x, y)$ un point de $\mathcal{C}_h$: on a $y = h(x) = 1/(x - 1)$.
   T_1 est une bijection sur $\mathbb{R}^2$. Notons N_1 l'antécédent de N par T_1 : le point N_1 est de coordonnées $(x - 1, y) = (x - 1, 1/(x - 1))$.
   On remarque que $g(x - 1) = 1/(x - 1)$, donc N_1 appartient à $\mathcal{C}_g$.
   On peut donc affirmer que $\mathcal{C}_h$ est inclus dans $T_1(\mathcal{C}_g)$, et finalement que ces deux ensembles sont égaux.
3. On utilise également une double inclusion pour montrer que $T_2(\mathcal{C}_h)$ est égal à $\mathcal{C}_f$
   — Soit $M(x, y)$ un point de $\mathcal{C}_h$. On a $y = 1/(x - 1)$ et L'image par T_2 de M est le point M_2 de coordonnées $(x, y + 1) = \left(x, 1 + \dfrac{1}{x - 1}\right)$. D'après la question 1, on a donc $f(x) = y + 1$, c'est à dire que M_2 appartient à $\mathcal{C}_f$. On a ainsi montré que $T_2(\mathcal{C}_h)$ est inclus dans $\mathcal{C}_f$.
   — Réciproquement, soit $N(x, y)$ un point de $\mathcal{C}_f$: on a donc $y = \dfrac{x}{x - 1}$.
   T_2 est bijective sur $\mathbb{R}^2$, et $T_2^{-1}(N)$ est le point N_2 de coordonnées $(x, y - 1)$.
   Or
   $$y - 1 = \frac{x}{x - 1} - 1 = \frac{1}{x - 1} = h(x)$$
   donc N_2 appartient à $\mathcal{C}_h$.
   On en déduit que $\mathcal{C}_f$ est inclus dans $T_2(\mathcal{C}_h)$.
   On peut donc conclure que $\mathcal{C}_f$ est égal à $T_2(\mathcal{C}_h)$.
4. On a montré que $\mathcal{C}_h = T_1(\mathcal{C}_g)$ et que $\mathcal{C}_f = T_2(\mathcal{C}_h)$.
   $\mathcal{C}_f$ est donc l'image par $T_2 \, o \, T_1$ de $\mathcal{C}_g$.
   $T_2 \, o \, T_1$ convient donc. On peut remarquer que $T_2 \, o \, T_1$ est la translation de vecteur $(1, 1)$, et que ces deux translations commutent.
   Attention, il existe d'autres application affines transformant $\mathcal{C}_g$ en $\mathcal{C}_f$!

Exercice 3 (Trinôme)**.**
Soient $a \neq 0$, b et c trois réels. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

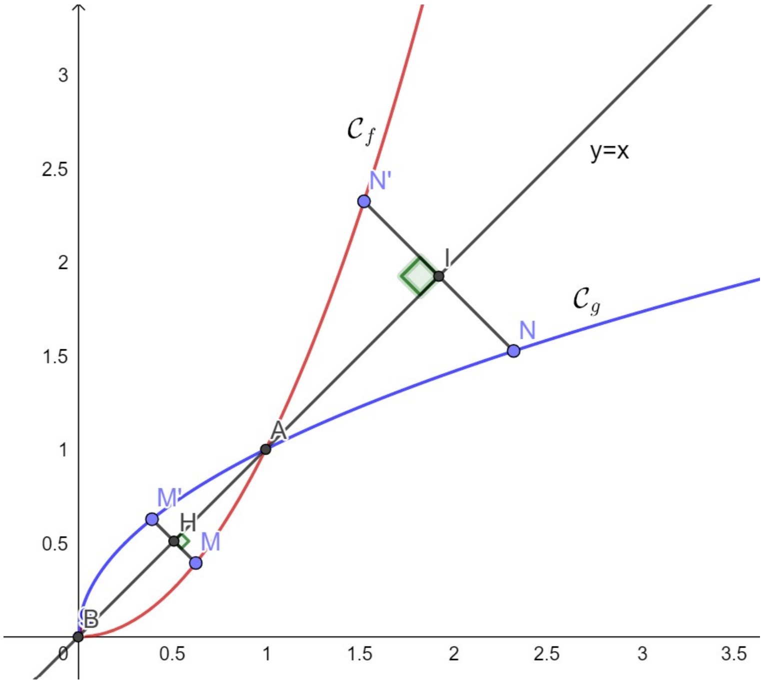
1. Rappeler les variations de f en fonction du signe de a.
2. Comment s'appelle la courbe représentative de f ? Quelle propriété de symétrie possède-t-elle ? Comment cette symétrie se traduit-elle algébriquement ?
3. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
4. Tracer sur le même graphique une courbe représentative des fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$, toutes deux définies sur $\mathbb{R}^+$. Pourquoi ces deux courbes sont-elles symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$?

Correction

1. Si a est strictement positif, alors f est décroissante sur $]-\infty, -b/(2a)]$ et croissante sur $[-b/(2a), +\infty[$.
   Si a est strictement négative, alors f est croissante sur $]-\infty, -b/(2a)]$ et décroissante sur $[-b/(2a), +\infty[$.
2. La courbe représentative de f est une parabole. Elle est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -b/2a$. Algébriquement, cette propriété de symétrie se traduit par : pour tout réel h, on a
   $$f\left(\frac{-b}{2a} + h\right) = f\left(\frac{-b}{2a} - h\right).$$
3. On distingue suivant le signe du discriminant de f, noté Δ :
   — Si Δ est strictement négatif, alors, f ne s'annule pas et, pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de a.
   — Si Δ est nul, alors f n'annule en $-b/(2a)$ et est du signe de a sur $\mathbb{R}$ privé de $-b/(2a)$.

— Si Δ est strictement positif, alors f s'annule en $r_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et en $r_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, et est du signe de a en dehors de l'intervalle formé par r_1 et r_2, et du signe opposé sur l'intervalle formé par r_1 et r_2.

4. Consulter le graphique ci-dessous.



Soit M un point de la courbe représentative de f et N un point de la courbe représentative de g. Il faut montrer que le symétrique de M par rapport à la droite D d'équation $y = x$ appartient à la courbe représentative de g, et que le symétrique N' de N par rapport à cette même droite appartient à la courbe représentative de f.

Soit $A(x_0, y_0)$ un point du plan. Notons $A' = (y_0, x_0)$.

Le milieu du segment $[A, A']$ est de coordonnées $(\dfrac{x_0+y_0}{2}, \dfrac{x_0+y_0}{2})$, donc il appartient à la droite D. Cette droite a pour vecteur directeur le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, dont le produit scalaire avec le vecteur $\vec{AA'}$ est nul. Le point A' est donc le symétrique de A par rapport D.

Revenons à M : notons x_0 l'abscisse de M. L'ordonnée de M est égale à x_0^2, et le symétrique M' de M par rapport à D a pour coordonnées (x_0^2, x_0). Par définition de f, x_0 est positif, donc $x_0 = g(x_0^2)$: le point M' appartient à la courbe représentative de g.

De même, étudions N et son symétrique par rapport à D. Notons x_1 l'abscisse de N. Son ordonnée est alors égale à $\sqrt{x_1}$, et le symétrique N' de N par rapport à D a pour coordonnées $(\sqrt{x_1}, x_1)$. On a bien $\sqrt{x_1} \geq 0$ et $x_1 = f(\sqrt{x_1})$, donc N' appartient à la courbe représentative de f.

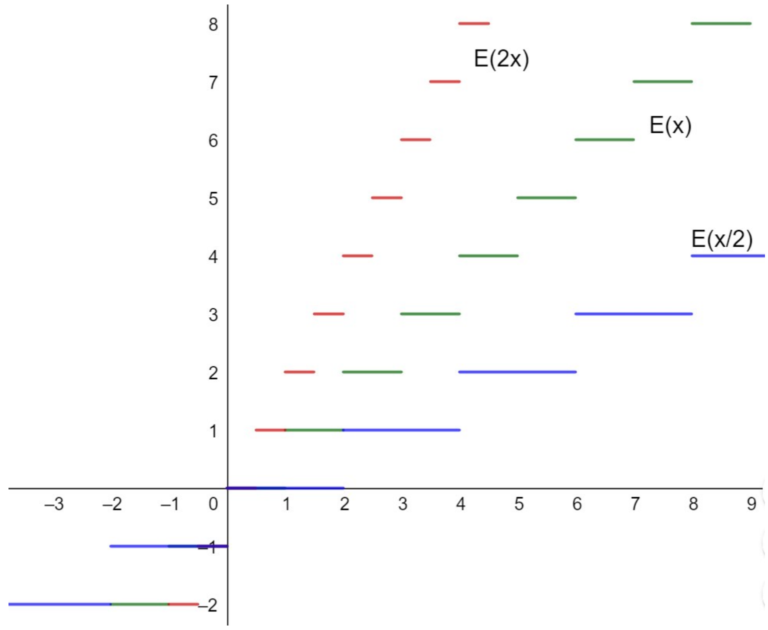
Exercice 4 (Partie entière)**.**

On rappelle que l'on note $E(x)$ la partie entière d'un réel x.

1. Quelle est l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction partie entière ?
2. Combien vaut $E(0.5)$? Et $E(-1.5)$?
3. Tracer les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto E(x)$, $x \mapsto E(2x)$ et $x \mapsto E(x/2)$.

Correction

1. Par définition de E, l'image d'un réel par E est un entier relatif, donc $E(\mathbb{R})$ est inclus dans $\mathbb{Z}$.
   Réciproquement, l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction partie entière est l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. En effet, pour tout entier relatif k, on a $E(k) = k$, donc $\mathbb{Z}$ est inclus dans $E(\mathbb{R})$.
2. 0 est un entier relatif et $0 \leq 0.5 < 0 + 1$, donc $E(0.5) = 0$.
   De même, -2 est un entier relatif et $-2 \leq -1.5 < -2 + 1$, donc $E(-1.5) = -2$.

3. 

Exercice 5 (Trigo)**.**

Soient x et y deux réels.

1. Exprimer les réels $\cos(x+y)$, $\cos(2x)$, $\sin(x+y)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos x$, $\sin x$, $\cos y$ et $\sin x$.
2. Montrer que $1+\sin x = \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$.
3. Exprimer les réels $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
4. Exprimer en fonction de $\tan x$ seulement les expressions suivantes :

   (a) $f_1(x) = \cos^2 x$

   (b) $f_2(x) = \dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x - \cos^4 x}$

   (c) $f_3(x) = \dfrac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x}$

   (d) $f_4(x) = \cos^2 x - \sin x \cos x$.

Correction

Soient x et y deux réels.

1. Soient x et y deux réels.
   On a $\cos(x+y) = \cos x\ \cos y - \sin x\ \sin y$ et $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos 2x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.
   On a également $\sin(x+y) = \sin x\ \cos y + \cos x\ \sin y$, et $\sin(2x) = 2\sin x\ \cos x$.
2. Soit x un réel. On a

$$\begin{aligned}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\ \sin\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 1 + \sin x.\end{aligned}$$

3. Soit x un réel. On a

$$\begin{aligned}\cos(4x) &= \cos(2(2x)) \\ &= 2\cos^2(2x) - 1 \\ &= 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 \\ &= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1\end{aligned} \qquad \text{et } \begin{aligned}\sin(4x) &= \sin(2(2x)) \\ &= 2\sin(2x)\ \cos(2x) \\ &= 4\sin x\ \cos x\ (2\cos^2 x - 1) \\ &= 8\sin x\ \cos^3 x - 4\sin x\ \cos x\end{aligned}$$

4. Soit x un réel n'appartenant pas à $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, c'est-à-dire pour lequel $\tan x$ est bien défini.

   (a)

$$\begin{aligned}f_1(x) = \cos^2 x &= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\tan^2 x + 1}.\end{aligned}$$

(b) On suppose de plus pour cette question que $|\sin x| \neq |\cos x|$, c'est-à-dire que x n'appartient pas non plus à $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. On a :

$$f_2(x) = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x - \cos^4 x} = \frac{\tan^4 x + 1}{\tan^4 x - 1}$$

(c) On suppose de plus pour cette question que $\sin x \neq \cos x$, c'est-à-dire que x n'appartient pas non plus à $\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$. On a :

$$\begin{aligned} f_3(x) = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x} &= \frac{\cos^3 x\ (\tan^3 x - 1)}{\cos x\ (\tan x - 1)} \\ &= \cos^2 x \frac{\tan^3 x - 1}{\tan x - 1} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 x}\left(\tan^2 x + \tan x + 1\right) \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} f_4(x) = \cos^2 x - \sin x \cos x &= \cos^2 x(1 - \tan x) \\ &= \frac{1 - \tan x}{1 + \tan^2 x} \end{aligned}$$

Exercice 6 (Trigo - encore !)**.**

1. Rappeler les formules d'addition de $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$.
2. Résoudre l'équation, d'inconnue x :
$$\sin x = \frac{1}{2}.$$
3. Montrer qu'il existe un réel θ tel que, pour tout réel y,
$$\sin(y + \theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin y + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos y.$$
4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation, d'inconnue y :
$$\sin y + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Correction

1. Soient a et b deux réels. On a
$$\sin(a+b) \sin a\ \cos b + \cos a\ \sin b \qquad \text{et} \qquad \cos(a+b) = \cos a\ cosb - \sin a \sin b$$
2. Soit x un réel. On a $\sin x = \frac{1}{2}$ si et seulement si $x \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $x \equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$
3. Soit y et θ deux réels. On a $\sin(y+\theta) = \cos\theta\ \sin y + \sin\theta\ \cos y$.
On remarque qu'en choisissant $\theta = \pi/4$, on obtient :
$$\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin y + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos y.$$
4. Soit y un réel. On remarque que
$$\begin{aligned} \sin y + \cos y &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin y + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos y\right) \\ &= \sqrt{2} \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$
On a donc $\sin y + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ si et seulement si $\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$. L'ensemble des solutions de l'équation $\sin y + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ est donc $\left\{\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 7 (Composition)**.**

1. Soient I, J et K des parties de $\mathbb{R}$ et $f : J \to K$ et $g : I \to J$. Montrer que si f et g sont toutes les deux monotones, alors $f \circ g$ est également monotone. Pouvez-vous préciser son sens de variation en fonction de ceux de f et de g ?
2. Écrire les fonctions suivantes comme la composée de deux fonctions et en déduire leur sens de variation.

   (a) $x \mapsto (1+2x)^2$; (b) $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$; (c) $x \mapsto \exp(x^2-1)$.

Correction

1. Le plus simple est probablement de distinguer quatre cas suivant les sens de variation de f et g. On remarque alors que $f \circ g$ est croissante si f et g sont toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes, et que $f \circ g$ est décroissante si l'une est croissante et l'autre décroissante.
2. Les décompositions proposées ne sont pas uniques ! Chacune des décompositions proposées fait intervenir la fonction carré, qui est bien entendu décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.
   (a) Soit $h_1 : x \mapsto (1+2x)^2$. Cette fonction peut s'écrire comme la composée de la fonction (affine et croissante) $x \mapsto 1+2x$ par la fonction carré $y \mapsto y^2$. La fonction carré étant croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$, on en déduit que h est croissante sur $[-0.5, +\infty[$ et décroissante $]-\infty, -0.5]$.
   (b) Soit $h_2 : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. Cette fonction peut s'écrire comme la composée de la fonction carré par la fonction $y \mapsto 1/(1+y)$ qui est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. La fonction h_2 est donc croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
   (c) Soit $h_3 : x \mapsto \exp(x^2-1)$.

Exercice 8 (Image directe, image réciproque)**.**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto x^2$, et E la fonction partie entière.
Déterminer les ensembles suivants :

1. $f([0,3])$.
2. $f^{-1}([0,4])$
3. $f^{-1}([-1,4])$
4. $f^{-1}([\sqrt{2},4])$
5. $\sin([0,\pi])$
6. $\sin^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$
7. $\sin^{-1}\left(\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)$
8. $\tan^{-1}([-1,1])$.
9. $E([-1.5,1.5])$.
10. $E^{-1}([-1,1]\cup\{2\})$.

Correction

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto x^2$, et E la fonction partie entière.
Déterminons les ensembles suivants :

1. $f([0,3]) = [0,9]$.
2. $f^{-1}([0,4]) = [-2,2]$
3. $f^{-1}([-1,4]) = [0,2]$
4. $f^{-1}([\sqrt{2},4]) = [-2,-\sqrt{4}2] \cup [\sqrt[4]{2},2]$.
5. $\sin([0,\pi]) = [0,1]$.
6. On utilise le fait que la fonction sin est de période 2π et que $\pi/6$ et $5\pi/6$ sont les 2 réels x de $[-\pi,\pi]$ tels que $\sin x = 1/2$. On a donc : $\sin^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.
7. On utilise la périodicité de la fonction sin et le fait que $\sin[-\pi/6,\pi/6] = [-1/2,1/2]$ et $\sin[5\pi/6,7\pi/6] = [-1/2,1/2]$. On obtient :
$$\sin^{-1}\left(\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi\right]\bigcup\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right].$$
8. On utilise la périodicité de la fonction tan, sa monotonie sur $]-\pi/2,\pi/2[$ et le fait que $\tan[-\pi/4,\pi/4] = [-1,1]$. On en déduit :
$$\tan^{-1}([-1,1]) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{-\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right].$$

9. $E([-1.5,1.5]) = \{-2,-1,0,1\}$.
10. $E^{-1}([-1,1]\cup\{2\}) = E^{-1}(\{-1,0,1,2\} = [-1,3[$.

Exercice 9 (Réciproque de fonctions circulaires)**.**

1. Soit $f = \cos|_{[2\pi,3\pi]}$, la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[2\pi, 3\pi]$. Exprimer $f^{-1} : [-1,1] \to [2\pi,3\pi]$ en utilisant les fonctions arccos et/ou arcsin.
2. Soit $g = \cos|_{[\pi,2\pi]}$, la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[\pi, 2\pi]$. Exprimer $g^{-1} : [-1,1] \to [\pi,2\pi]$ en utilisant les fonctions arccos et/ou arcsin.

<u>Correction</u>

1. La fonction cos est 2π-périodique, donc pour tout réel x, on a $\cos(x-2\pi) = \cos x$.
   La fonction arccos a pour ensemble image l'intervalle $[0,\pi]$, donc pour tout x de $[2\pi,3\pi]$, on a
   $$x = 2\pi + \arccos(\cos(x)) = 2\pi + \arccos(f(x))$$
   La fonction réciproque de f est donc la fonction $\tilde{f}$ définie sur $[-1,1]$ par $\tilde{f}(t) = 2\pi + \arccos(t)$.
2. Soit t un réel de $[-1,1]$. Notons $u = \arccos(t)$. On sait que u appartient à $[0,\pi]$, que $\cos(u) = \cos(2\pi-u)$, et que $2\pi - u$ appartient à $[\pi, 2\pi]$.
   On a donc $g^{-1}(t) = 2\pi - \arccos(t)$.
   On a donc, pour tout $t \in [-1,1]$, $g^{-1}(t) = 2\pi - \arccos(t)$

Exercice 10 (Réciproque de fonctions circulaires : Calcul)**.**
Calculez les valeurs suivantes :

1. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. $\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
3. $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
4. $\arctan(-1)$
5. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
6. $\arctan\left(\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right)$
7. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)\right)$
8. $\tan(\arctan(3))$.

<u>Correction</u>

1. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.
2. $\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$
3. $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$
4. $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$
5. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$
6. $\arctan\left(\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$
7. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$
8. $\tan(\arctan(3)) = 3$.

Exercice 11 (Dérivée)**.**
Calculer là où cela est possible les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \sin^2 x$
2. $f_2 : x \mapsto \sin(x^2)$
3. $f_3 : x \mapsto \cos^2(3x)$
4. $f_4 : x \mapsto \tan(x^2)$
5. $f_5 : x \mapsto \frac{1-x}{2+x}$
6. $f_6 : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$
7. $f_7 : x \mapsto e^{2x+1}$
8. $f_8 : x \mapsto \ln(1+x^4)$
9. $f_9 : x \mapsto \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$
10. $f_{10} : x \mapsto \ln|\cos x|$

<u>Correction</u>

1. La fonction sin est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et la fonction carré aussi. La fonction f_1 est donc définie et dérialbe sur $\mathbb{R}$. Par les résultats sur les dérivées des fonctions composées, on a, pour tout réel x, $f_1'(x) = 2\cos x \sin x = \sin(2x)$.

2. Par les mêmes arguments, on justifie que f_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a : $f_2'(x) = 2 \cdot x \cdot \cos(x^2)$.
3. La fonction f_2 est la composée d'une fonction linéraire, de la fonctioncos et de la fonction carré : elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a : $f_3'(x) = 3 \cdot 2 \cdot \sin(3x)\ cdots \cos(3x) = 3\sin(6x)$.
4. La fonction tan est définie et dérivable sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, où k est un entier relatif, donc f_4 est définie et dérivable sur l'intervalle $\left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right[$ et sur tout intervalle de la forme $\left]\sqrt{\frac{\pi}{2}-k\pi}, \sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi}\right[$, pour k un entier naturel non nul.
La dérivée de la fonction tan étant la fonction $1+\tan^2$, on a, pour tout x tel que f_4 est bien définie : $f_4'(x) = 2 \cdot x \cdot (1+\tan^2(x^2))$
5. f_5 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$, et pour tout réel x différent de 2, on a $f_5(x) = -1 + \dfrac{3}{2+x}$ donc
$$f_5'(x) = -\frac{3}{(2+x)^2}$$
6. La fonction f_6 est définie pour tout x de $[-1,1]$, et dérivable (au moins) pour tout x de $]-1,1[$: par dérivée d'une fonction composée, on a
$$f_6'(x) = -2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-1/2} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$
On peut vérifier que f_6 n'est pas dérivable à gauche en 1 et à droite en -1 en étudiant le taux d'accroissement. On a par exemple, pour tout $h \in]0,2]$
$$\begin{aligned}\frac{f_6(1-h)-f_6(1)}{-h} &= -\frac{\sqrt{1-(1-h)^2}-1}{h} \\ &= -\frac{\sqrt{2h-h^2}}{h} \\ &= -h^{-1/2}\sqrt{2-h}\end{aligned}$$
Le taux d'accroissement diverge lorsque h tend vers $0+$, donc f_6 n'est pas dérivable (à gauche) en 1. De même, f_6 n'est pas dérivable à droite en -1.
7. f_7 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a pour tout réel x : $f_7'(x) = 2e^{2x+1}$.
8. La fonction ln étant définie et dérivable sur $[1, +\infty[$, la fonction f_7 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a : $f_7'(x) = \dfrac{4x^3}{1+x^4}$.
9. La fonction f_9 est définie et dérvable pour tout x différent de -1 et 1. Sa dérivée est un peu plus simple à calculer si on utilise les propriétés de la fonction ln :
Pour tout réel x différent de 1 et -1, on a $f_9(x) = \ln|1+x| - \ln|1-x|$.
donc $f_9'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{-1}{1-x} = \dfrac{2}{1-x^2}$.
10. La fonction f_{10} est définie et dérivable pour tout x tel que $\cos(x)$ est non nul, c'est-à-dire, pour tout x n'appartenant pas à $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, $f_{10}'(x) = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$.

Exercice 12 (Fonctions hyperboliques)**.**
Montrer que pour tous réels u et v, on a :
$$\begin{aligned}\cosh^2 u + \sinh^2 v = \sinh^2 u + \cosh^2 v = \cosh(u+v)\cosh(u-v) \\ \cosh^2 u - \cosh^2 v = \sinh^2 u - \sinh^2 v = \sinh(u+v)\sinh(u-v)\end{aligned}$$

Correction

Soient u et v deux réels.

On a

$$\begin{aligned}\cosh^2 u + \sinh^2 v &= \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^v - e^{-v}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2u} + e^{-2u} + 2 + e^{2v} + e^{-2v} - 2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2u} + e^{-2u} + e^{2v} + e^{-2v}\right)\end{aligned}$$

En échangeant le rôle de u et v dans cette dernière expression, on déduit que $\cosh^2 u + \sinh^2 v = \cosh^2 v + \sinh^2 u$.

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}\cosh(u+v)\cosh(u-v) &= \frac{1}{4}\left(e^{u+v} + e^{-u-v}\right) \times \left(e^{u-v} + e^{v-u}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{u+v+u-v} + e^{u+v+v-u} + e^{-u-v+u-v} + e^{-u-v+v-u}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2u} + e^{2v} + e^{-2v} + e^{-2u}\right)\end{aligned}$$

D'où le résultat demandé.

De la même façon, et toujours pour deux réels u et v quelconques :

$$\begin{aligned}\cosh^2 u - \cosh^2 v &= \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^v + e^{-v}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2u} + e^{-2u} + 2 - e^{2v} - e^{-2v} - 2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2u} + e^{-2u} - e^{2v} - e^{-2v}\right)\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}\sinh(u+v)\sinh(u-v) &= \frac{1}{4}\left(e^{u+v} - e^{-u-v}\right) \times \left(e^{u-v} - e^{v-u}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{u+v+u-v} - e^{u+v+v-u} - e^{-u-v+u-v} + e^{-u-v+v-u}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2u} - e^{2v} - e^{-2v} + e^{-2u}\right)\end{aligned}$$

On a donc bien l'égalité $\cosh^2 u - \cosh^2 v = \sinh(u+v)\sinh(u-v)$.

De plus, on utilise la relation $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$:

$$\begin{aligned}\cosh^2 u - \cosh^2 v &= 1 + \sinh^2 u - (1 + \sinh^2 v) \\ &= \sinh^2 u - \sinh^2 v.\end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure à la double égalité.

Exercice 13 (Équation - Fonctions hyperboliques)**.**

1. Montrer que $\cosh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = 2/\sqrt{3}$ et $\sinh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = 1/\sqrt{3}$.
2. À l'aide de la formule de calcul du $\cosh(a+b)$, résoudre l'équation d'inconnue réelle x :

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\cosh x + \frac{1}{\sqrt{3}}\sinh x = \cosh(5x).$$

Correction

1. On a

$$\cosh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{(\ln 3)/2} + e^{-(\ln 3)/2}\right) = \frac{1}{2}\left((3^{1/2} + 3^{-1/2}\right) = \frac{1}{2}\frac{3+1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

et

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{(\ln 3)/2} - e^{-(\ln 3)/2}\right) = \frac{1}{2}\left(3^{1/2} - 3^{-1/2}\right) = \frac{1}{2}\frac{3-1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2. Notons $u = \frac{1}{2}\ln(3)$.
   Pour tous réels a et b, on a $\cosh(a+b) = \cosh a \cdot \cosh b + \sin h \cdot \sinh b$, donc, pour tout réel x, on a

   $$\frac{2}{\sqrt{3}}\cosh x + \frac{1}{\sqrt{3}}\sinh x = \cosh u \cdot \cosh x + \sinh u \cdot \sinh x = \cosh(x+u).$$

   Résoudre l'équation proposée revient donc à chercher l'ensemble des réels x tels que $\cosh(u+x) = \cosh(5x)$.
   Or on sait que deux réels admettent le même cosinus hyperbolique s'ils sont égaux ou opposés.
   On a donc

   $$\begin{aligned}\cosh(x+u) = \cosh(5x) &\iff x+u = 5x \text{ ou } x+u = -5x\\ &\iff 4x = u \text{ ou } -6x = u\\ &\iff x = \frac{u}{4} \text{ ou } x = -\frac{u}{6}\end{aligned}$$

   L'ensemble des réels x vérifiant $\frac{2}{\sqrt{3}}\cosh x + \frac{1}{\sqrt{3}}\sinh x = \cosh(5x)$ est donc

   $$\left\{\frac{\ln 3}{8}, -\frac{\ln 3}{12}\right\}$$

Exercice 14 (Limite - exp)**.**

1. Discuter en fonction de la valeur du réel a l'existence et la valeur éventuelle de la limite de a^n quand n tend vers $+\infty$.
2. À quelle condition la fonction $x \mapsto a^x$ est-elle bien définie sur $\mathbb{R}$? Que pouvez-vous dire dans ce cas de la limite de a^x lorsque x tend ers $+\infty$?

Correction

1. Soit a un réel.
   Si a appartient à $]-1,1[$, alors (a^n) tend vers 0.
   Si $a = 1$, alors (a^n) est la suite constante égale à 1.
   Si $a > 1$, alors (a^n) diverge vers $+\infty$.
   Si $a \leq -1$, alors (a^n) diverge.
2. La fonction $x \mapsto a^x$ est bien définie lorsque a est positif. Sa limite est la même que la limite de la suite (a^n).

Exercice 15 (Limites - Opérations)**.**

Calculer, si elles existent les limites quand x tend vers $+\infty$ de :

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{x^2 + 2x^5}{1 + x^4}$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{x \sin x + x^2}{1 + x^2}$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x} + 5}{x^2 + \cos x}$
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{x}\ \ln(2x+3)$

6. $f_6 : x \mapsto \sin \frac{1}{x}$
7. $f_7 : x \mapsto x + \cos x$
8. $f_8 : x \mapsto e^{-x}(\cosh^3 x - \sinh^3 x)$
9. $f_9 : x \mapsto x - \ln(\cosh x)$.

Correction

1. Pour tout x, $\frac{x^2+2x^5}{1+x^4} = \frac{x^5}{x^4}\,\frac{2+x^{-3}}{1+x^{-4}}$ donc $\lim\limits_{+\infty} \frac{x^2+2x^5}{1+x^4} = +\infty$.
2. Pour tout x, $\frac{x\sin x + x^2}{1+x^2} = \frac{x^2}{x^2}\,\frac{1+x^{-1}\sin x}{1+x^{-2}}$ donc $\lim\limits_{\infty} f_2(x) = 1$.
3. Pour tout $x \geq 1$, $f_3(x)$ est bien définie et $\frac{x\sqrt{x}+5}{x^2+\cos x} = \frac{x^{3/2}}{x^2}\,\frac{1+5x^{-3/2}}{1+x^{-2}\cos x}$ donc $\lim\limits_{+\infty} f_5(x) = 0$.
4. Pour tout $x \geq 1$, $f_4(x)$ est bien définie et on a

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1} &= \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})\times(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\\ &= \frac{\sqrt{x+1}^2-\sqrt{x-1}^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\\ &= \frac{x+1-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}.\end{aligned}$$

   On en déduit que $\lim\limits_{+\infty} f_4(x) = 0$.
5. Pour tout $x > 0$, on a $\ln(2x+3) = \ln(x) + \ln \frac{2x+3}{x}$.
   De plus, la limite en $+\infty$ de $x^{-1}\ln(x)$ est nulle, et celle de $\ln \frac{2x+3}{x}$ est égale à $\ln 2$.
   Donc $\lim\limits_{+\infty} f_5(x) = 0$.
6. Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x}$ tend vers 0, et lorsque u tend vers 0, $\sin u$ tend vers 0.
   Donc, par composition de limites, $\lim\limits_{+\infty} \sin \frac{1}{x} = 0$
7. Pour tout $x > 0$, $f_7(x) = x \times \left(1 + \frac{\cos x}{x}\right)$.
   La fonction cos étant bornée, le théorème des gendarmes permet de justifier que $\lim\limits_{+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$.
   Donc $\lim\limits_{+\infty} f_7(x) = +\infty$.
   NB : on peut tout aussi bien minorer $f_7(x)$ par $x-1$, et utiliser une comparaison de limites.
8. On commence par expliciter f_8 à l'aide de la fonction exponentielle : pour tout réel x, on a

$$\begin{aligned}f_8(x) &= e^{-x}(\cosh^3 x - \sinh^3 x)\\ &= \frac{1}{8}e^{-x}\ \left(e^{3x}+3e^{x}+3e^{-x}+e^{-3x}-\left(e^{3x}-3e^{x}+3e^{-x}-e^{-3x}\right)\right)\\ &= \frac{1}{8}e^{-x}\ \left(6e^{x}+2e^{-3x}\right)\\ &= \frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{-2x}\end{aligned}$$

   Donc $\lim\limits_{+\infty} f_8(x) = \frac{3}{4}$.
9. Pour tout réel x, $\cosh x$ est strictement positif, donc $f_9(x)$ est bien défini.

Soit x un réel. On a

$$\begin{aligned}
f_9(x) &= x - \ln(\cosh x) \\
&= x - \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
&= x - \ln \left(\frac{e^x \left(1 + e^{-2x}\right)}{2} \right) \\
&= x - \ln(e^x) - \ln\left(1 + e^{-2x}\right) + \ln 2 \\
&= -\ln\left(1 + e^{-2x}\right) + \ln 2
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{+\infty} f_9(x) = \ln 2$.

Exercice 16 (Fonction réciproque - Dérivée)**.**

1. Montrer que sinh est une bijection continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
2. Calculer explicitement la dérivée de la réciproque $\sinh^{-1}$ à partir d'une formule du cours.
3. Calculer explicitement $\sinh^{-1}(y)$ pour y réel et retrouver le résultat du 2.

Correction

1. La fonction sinh est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée cosh qui est strictement positive sur $\mathbb{R}$. La fonction sinh est donc strictement croissante $\mathbb{R}$. Par le théorème des valeurs intermé
   (a) Montrer que sinh est une bijection continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer explicitement la dérivée de la réciproque $\sinh^{-1}$ à partir d'une formule du cours.
   (c) Calculer explicitement $\sinh^{-1}(y)$ pour y réel et retrouver le résultat du 2.

   diaires, on en déduit qu'elle est bijective de $\mathbb{R}$ sur son ensemble image.
   Or $\lim\limits_{-\infty} \sinh = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \sinh = +\infty$, donc la fonction sinh est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans lui-même.
2. D'après le cours, si g est la fonction réciproque de f, alors, pour tout y tel que $f'(g(y))$ est non nul, on a : $g'(y) = \dfrac{1}{f'(g(y))}$.
   Notons argsh la fonction réciproque de sinh.
   La dérivée de sinh ne s'annule pas donc, pour tout réel y, on a $\operatorname{argsh}' y = \dfrac{1}{\cosh(\operatorname{Argsinh}(y)}$.
   De plus, $\sinh(\operatorname{Argsinh}(y) = y$ et, pour tout x, $\cosh(x) = \sqrt{1 + \sinh^2(x)}$.
   Donc $\cosh(\operatorname{Argsinh}(y)) = \sqrt{1 + y^2}$.
   On a donc : $\operatorname{Argsinh}'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$.
3. Soit y un réel. Déterminons x tel que $\sinh(x) = y$.
   On a

$$\begin{aligned}
y = \sinh(x) &\iff y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\
&\iff e^x - e^{-x} - 2y = 0 \\
&\iff (e^x)^2 - 2y \times e^x - 1 = 0
\end{aligned}$$

   Il s'agit d'une équation de degré 2 en la variable $X = e^x$: il nous faut donc déterminer les racines positives de cette équation.
   Déterminons les racines de $X^2 - 2yX - 1 = 0$: il s'agit d'un trinôme en X, dont le discriminnt Δ est égal à $\Delta = 4y^2 + 4$ qui est toujours strictement positif.
   Les racines de ce trinôme sont donc

$$r_1 = \frac{2y - 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y - \sqrt{y^2+1} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{2y + 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y + \sqrt{y^2+1}.$$

Pour toute valeur de y on remarque que r_1 est négative et r_2 est positive.
En posant $x = \ln X$, on obtient l'antécédent de y par sinh :

$$\mathrm{Argsinh}(y) = \ln(y + \sqrt{1+y^2}).$$

Dérivons cette fonction : pour tout y, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Argsinh}'(y) &= \left(1 + \frac{2y}{2\sqrt{1+y^2}}\right) \times \frac{1}{y + \sqrt{1+y^2}} \\
&= \frac{\sqrt{1+y^2} + y}{\left(\sqrt{1+y^2} \times (y + \sqrt{1+y^2})\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.
\end{aligned}$$

Exercice 17 (Fonction réciproque - Dérivée)**.**
Déterminer les ensembles de définition des fonction suivantes et donner leur dérivée :

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arccos(\cos(x))$. Calculer sa dérivée $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbb{Z}\pi\}$.
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arcsin(\sin(x))$. Calculer sa dérivée $g'(x)$ pour tout x où g est dérivable.
3. $x \mapsto \arcsin(\cos(x))$
4. $x \mapsto \arccos(\sin(x))$
5. $x \mapsto \arctan(\tan(x))$
6. $x \mapsto \arctan(\sin(x))$

Correction

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arccos(\cos(x))$.
   Cette fonction est la composée de deux fonctions continues (et définies sur des ensembles compatibles), donc elle est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   La fonction $x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto -\sin x$, et la fonction $u \mapsto \arccos u$ est dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée $u \mapsto -(1-u^2)^{-1/2}$.
   La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}\backslash(\pi\mathbb{Z})$, de dérivée :

   $$f'(x) = -\frac{-\sin x}{-\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{\sin x}{|\sin x|} = \mathrm{sgn}(\sin x).$$

   On étudie la dérivabilité en 0 (la situation en $x = k\pi$, pour un entier naturel k est similaire) : on calcule le taux d'accroissement en distinguant les cas $x \in]0,\pi[$ et $x \in]-pi, 0[$:

   <u>1er cas</u> : $x \in]0,\pi[$.
   Alors $\arccos(\cos x) = x$ et

   $$\begin{aligned}\frac{\arccos(\cos x) - \arccos(\cos 0)}{x - 0} &= \frac{x}{x} \\ &= 1\end{aligned}$$

   <u>2ème cas</u> : $x \in]-\pi, 0[$.
   Alors $\arccos(\cos x) = -x$ et

   $$\begin{aligned}\frac{\arccos(\cos x) - \arccos(\cos 0)}{x - 0} &= \frac{-x}{x} \\ &= -1\end{aligned}$$

   Les limites à droite et à gauche du taux d'accroissement lorsque x tend vers 0 existent mais sont différentes, donc la fonction f n'est pas dérivable en 0 (ni en $k\pi$ pour k un entier).
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \arcsin(\sin(x))$.
   Cette fonction est la composée de deux fonctions continues et définies sur des ensembles compatibles, donc g est continue sur $\mathbb{R}$.
   La fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\cos x$, et la fonction $u \mapsto \arcsin u$ est dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée $u \mapsto 1/\sqrt{1-u^2}$.
   La fonction g est donc dérivable sur $\mathbb{R}\backslash(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$, et de dérivée

$$g'(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{\cos x}{|\cos x|} = \mathrm{sgn}(\cos x).$$

Comme dans la question précédente, on peut calculer les limites à droite et à gauche du taux d'accroissement en $\pi/2$ (ou en $\pi/2 + k\pi$, pour tout entier k) : on remarque que pour tout réel, $\sin(\pi/2+h) = \sin(\pi/2-h)$.

1er cas : Soit $h \in]0,\pi[$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{g(\pi/2+h)-g(\pi/2)}{h} &= \frac{\arcsin(\sin(\pi/2+h)) - \arcsin(\sin(\pi/2))}{h} \\
&= \frac{\arcsin(\sin(\pi/2-h)) - (\pi/2)}{h} \\
&= \frac{\pi/2 - h - \pi/2}{h} \\
&= -1
\end{aligned}$$

2ème cas : Soit $h \in]0,\pi[$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{g(\pi/2-h)-g(\pi/2)}{-h} &= \frac{\arcsin(\sin(\pi/2-h)) - \arcsin(\sin(\pi/2))}{-h} \\
&= \frac{\arcsin(\sin(\pi/2-h)) - (\pi/2)}{h} \\
&= \frac{\pi/2 - h - \pi/2}{-h} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc le taux d'accroissement de g admet des limites différentes à droite et à gauche de $\pi/2$: g n'est donc pas dérivable en $\pi/2$ (ni en $\pi/2 + k\pi$, pour tout entier k).

3. La fonction $x \mapsto \arcsin(\cos(x))$ est continue $\mathbb{R}$ et dérivable en tout réel x pour lequel $t \mapsto \arcsin t$ est dérivable en $t = \cos x$, donc pour tout $x \notin \pi\mathbb{Z}$.
   On a alors :
   $$(\arcsin(\cos x))' = \frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{\sin x}{|\sin x|} = -\mathrm{sgn}(\sin x).$$
   Comme dans l'exercice précédent, on peut vérifier la non dérivabilité en $k\pi$, pour k un entier.
   On aurait aussi pu utiliser les résultats de l'exercice précédent ainsi que la relation $\arcsin t + \arccos t = \pi/2$.
4. La fonction $x \mapsto \arccos(\sin(x))$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en tout x pour lequel $t \mapsto \arccos t$ est dérivable en $t = \sin x$, donc pour tout $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.
   On a alors :
   $$(\arccos(\sin x))' = \frac{-\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = -\frac{\cos x}{|\cos x|} = -\mathrm{sgn}(\cos x).$$
5. Soit k un entier. La fonction $x \mapsto \tan x$ continue et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$, et la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction $x \mapsto \arctan(\tan x)$ est continue et dérivable sur ce même intervalle.
   Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$, on a $\arctan(\tan x) = x - k\pi$, donc la dérivée de $x \mapsto \arctan(\tan x))$ est constante égale à 1.
   La fonction $x \mapsto \arctan(\tan x))$ n'est pas dérivable en $\frac{\pi}{2} + k\pi$ puisqu'elle n'est pas définie (ni prolongeable par continuité) en ce point.
6. Les deux fonctions $t \mapsto \arctan t$ et $x \mapsto \sin x$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto \arctan(\sin x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel x, on a :
   $$(\arctan(\sin x))' = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$$

Études complètes de fonctions

Exercice 18 (Fraction rationnelle)**.**

On définit une fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}.$$

1. Étudier les variations de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
3. Calculer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de l'expression

   $$f(x) - (x + 2).$$

   En déduire que la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote au graphe de f.
4. Déterminer la position du graphe de f par rapport à cette asymptote.
5. Tracer le graphe de f.

Correction

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}.$$

1. On calcule la dérivée de f : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a :

   $$f'(x) = \frac{(2x + 3)(x + 1) - (x^2 + 3x + 3)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} = \frac{x\,(x + 2)}{(x + 1)^2}$$

   $f'(x)$ est donc du signe de $x\ (x + 2)$, donc positive sur $]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$, et négative entre -2 et 0. On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$\mathrm{sgn}(f'(x))$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	-1	$\searrow$	‖	$\searrow$	3	$\nearrow$	

2. En utilisant les propriétés classiques sur les limites, on détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, ainsi que les limites à droite et à gauche en -1 :

   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

   et

   $$\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to (-1)^+} f(x) = +\infty$$

   Cela permet de compléter le tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$\mathrm{sgn}(f'(x))$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

3. Soit x un réel différent de -1.

   On a

$$\begin{aligned}
f(x)-(x+2) &= \frac{x^2+3x+3}{x+1}-(x+2)\\
&= \frac{x^2+3x+3-(x+2)(x+1)}{x+1}\\
&= \frac{x^2+3x+3-(x^2+3x+2)}{x+1}\\
&= \frac{1}{x+1}
\end{aligned}$$

   Donc

$$\lim_{+\infty} f(x)-(x+2) = \lim_{+\infty} f(x)-(x+2) = 0.$$

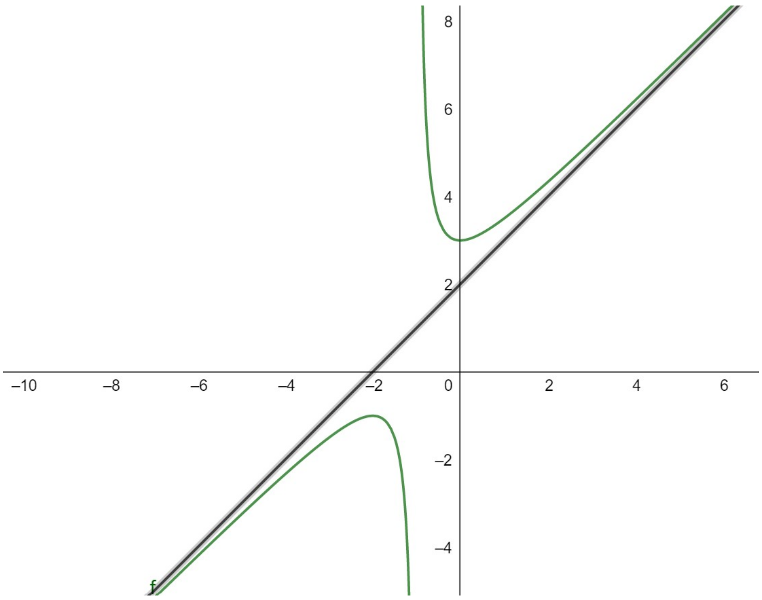
   C'est la définition des asymptotes : la courbe représentative de la fonction f admet pour asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$ la droite d'équation $y=x+2$.

4. Pour déterminer la position du graphe de f par rapport à son asymptote, il faut déterminer le signe de $f(x)-x-2$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

   $x+1$ est positif lorsque x tend vers $+\infty$, donc la courbe représentative de f est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

   $x+1$ est négatif lorsque x tend vers $-\infty$, donc la courbe représentative de f est en-dessous de son asymptote au voisinage de $-\infty$.

5. On trace le graphe de f et son asymptote.



Exercice 19 (Avec un logarithme)**.**

On note f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(x)=(1-x)\ln(1-x)+x$ et g la fonction définie sur $]0,1[$ par $g(x)=-\dfrac{\ln(1-x)}{x}$.

1. Étudier les variations de f sur $[0,1[$ et en déduire que f est à valeurs positives.
2. Étudier les variations de g sur $]0,1[$.
3. Déterminer les limites éventuelles de $g(x)$ pour x tendant vers 0 et pour x tendant vers 1.

Correction

On note f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(x)=(1-x)\ln(1-x)+x$ et g la fonction définie sur $]0,1[$ par $g(x)=-\dfrac{\ln(1-x)}{x}$.

1. On calcule la dérivée de f : soit $x\in]0,1[$. On a :

$$f'(x) = -\ln(1-x)+(1-x)\times\frac{-1}{1-x}+1 = -\ln(1-x)$$

Donc f' est strictement positive sur $]0,1[$. On en déduit que f est strictement croissante sur $]0,1[$. On remarque que $f(0)$ est égal à 0, donc f est positive sur $[0,1[$.

2. La fonction g est continue et dérivable sur $]0,1[$, et pour tout $x \in]0,1[$, on a :

$$g'(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{-x}{1-x} - \ln(1-x)\right) = \frac{-x-(1-x)\ln(1-x)}{x^2} = -\frac{f(x)}{x^2}.$$

D'après la question 1, on peut affirmer que, pour tout x de $]0,1[$, $g'(x)$ est négative, donc g est strictement décroissante sur $]0,1[$.

3. Soit $x \in]0,1[$. On a

$$g(x) = \frac{\ln(1-x)}{x} = -\frac{\ln(1-x)-\ln(1)}{(1-x)-1}.$$

$g(x)$ représente donc l'opposé du taux d'accroissement de la fonction ln entre $1-x$ et 1, donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\ln'(1) = -1$.

Pour la limite en 1, on utilise que $\lim\limits_{0} \frac{\ln t}{t} = -\infty$, donc $\lim\limits_{1} g(x) = -\infty$.

Exercice 20 (Avec une exponentielle)**.**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$.

1. Déterminer les limites éventuelles de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f.
3. Tracer sommairement la courbe représentative de f.

Correction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$.

1. En l'infini, l'exponentielle l'emporte sur les puissances, donc $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = 0$.
2. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On calcule sa dérivée : soit x un réel. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1 - 2\cdot x\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\ e^{-x^2} \\ &= \left(1-2x^2-x\right)e^{-x^2} \end{aligned}$$

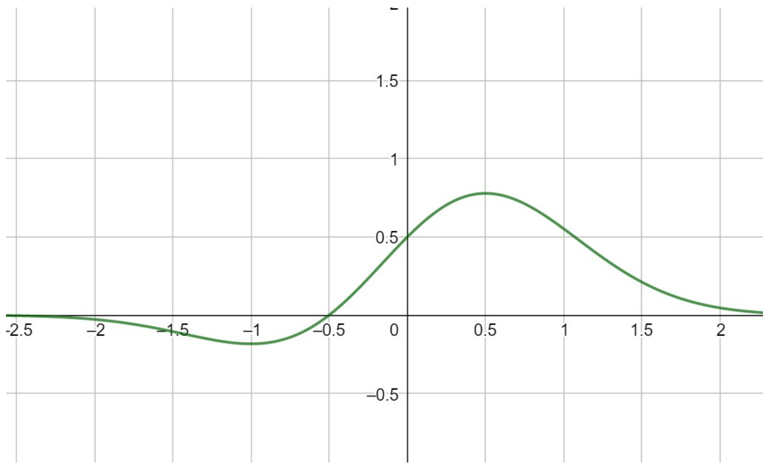
Le discriminant Δ de $-2x^2-x+1$ est égal à 9 donc les racines de ce trinôme sont $\frac{1-3}{-4} = \frac{1}{2}$ et $\frac{1+3}{-4} = -1$.

$f'(x)$ est donc positif pour tout x de $[-1, 1/2]$ et négatif sinon.

On dresse le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		$1/2$		$+\infty$
$\mathrm{sgn}(f'(x))$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-e^{-1/2}$	$\nearrow$	$e^{-1/4}$	$\searrow$	0

3. Pour tracer le graphe de f, on calcule sa valeur en 0, et on remarque aussi que f s'annule en $-1/2$. On peut également utiliser les valeurs des dérivées sur ces points.



Exercice 21 (Fonctions hyperboliques)**.**
Soit f la fonction définie par :

$$f(u) = \frac{4 - 5\cosh u}{\sinh u}$$

1. Montrer que f est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Est-elle paire ? Impaire ?
2. Déterminer les limites éventuelles de f en $+\infty$ et en 0^+.
3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^*$. On attend une expression très simple des points d'annulation de f'.
4. Dresser le tableau de variations de f puis tracer son graphe.

Correction
Soit f la fonction définie par :

$$f(u) = \frac{4 - 5\cosh u}{\sinh u}$$

1. sinh ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, donc f est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   Elle est impaire car son numérateur est pair et son dénominateur est impair.
2. En $+\infty$, cosh / sinh tend vers 1, donc f tend vers -5 en $+\infty$.
   En 0+, f tend vers $-\infty$. 0^+.
3. On calcule la dérivée de f' : pour tout x non nul,

$$\begin{aligned} f'(u) &= \frac{(-5\sin hu\ \ \sinh u - (4 - 5\cosh u)\ \cosh u}{\sinh^2 u} \\ &= \frac{5(-\sinh^2 u + \cosh^2 u) - 4\cosh u}{\sinh^2 u} \\ &= \frac{5 - 4\cosh u}{\sinh^2 u} \end{aligned}$$

   f' s'annule en $u_0 = \text{Argcosh}(5/4)$ et en $-u_0$, elle est positive sur $[-u_0, 0[\cup]0, u_0]$. Elle est négative sur $]-\infty, -u_0] \cup [u_0, +\infty[$.
   On peut vérifier par ailleurs que $u_0 = \ln 2$.
   En effet : On sait que u_0 existe et qu'il est positif.
   Soit u un réel positif. On a

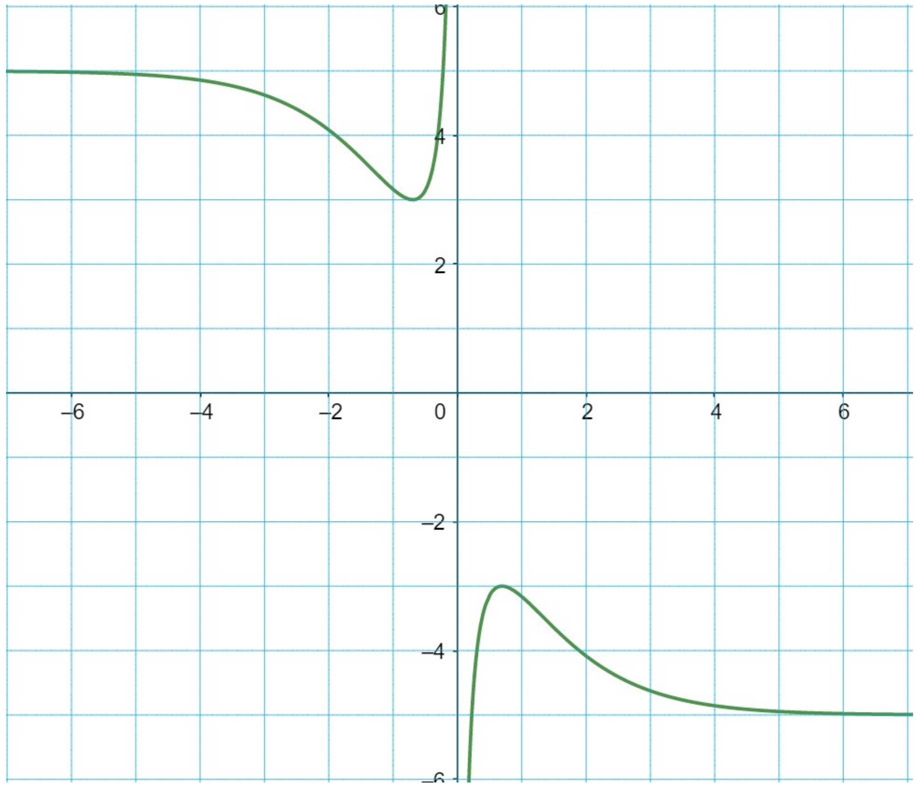
$$\begin{aligned} \frac{e^u + e^{-u}}{2} = \frac{5}{4} &\iff e^{2u} + 1 = \frac{5}{4}e^u \\ &\iff e^{2u} - \frac{5}{4}e^u + 1 = 0 \end{aligned}$$

   On a donc Argcosh$u = 5/4$ si et seulement si e^u est la racine supérieure à 1 du trinôme $X^2 - \dfrac{5}{4}X + 1$.
   Le trinôme $X^2 - \dfrac{5}{4}X + 1$ admet pour discriminant $\Delta = 9/4$ et pour racines $X_1 = 1/2$ et $X_2 = 2$.
   On en déduit que $e^{u_0} = 2$, donc $u_0 = \ln 2$.

4. Avant de dresser le tableau de variations de f, on détermine $f(\ln 2)$: on sait que $\text{Argcosh}(5/4) = \ln 2$ donc $\cosh(\ln 2) = 5/4$.
   De plus,
   $$\sinh(\ln 2) = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}.$$
   Donc
   $$f(\ln 2) = \frac{4 - \frac{5}{4}}{\frac{3}{4}} = -3.$$
   On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$\text{sgn}(f'(x))$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
f	5	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-5

   Et la courbe représentative de f :



Exercice 22 (Fonctions trigo)**.**
Soit f la fonction définie par $f(x) = 2\sin x + \sin(2x)$.

1. Déterminer son ensemble de définition et sa plus petite période, et discuter sa parité. Au vu de ces informations, choisir un intervalle d'étude approprié.
2. Calculer sa dérivée, puis discuter du signe de celle-ci en fonction de x.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Tracer la courbe représentative de f.

<u>**Correction**</u>
Soit f la fonction définie par $f(x) = 2\sin x + \sin(2x)$.

1. On peut remarquer que, pour tout x réel, $f(x) = 2\sin x \cdot (1 + \cos x)$.
   f est définie sur $\mathbb{R}$, et 2π est une période de f (et π n'en est pas une).
   C'est une fonction impaire car les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \sin(2x)$ sont impaires.
   On peut donc se contenter de l'étudier sur $[0, \pi]$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

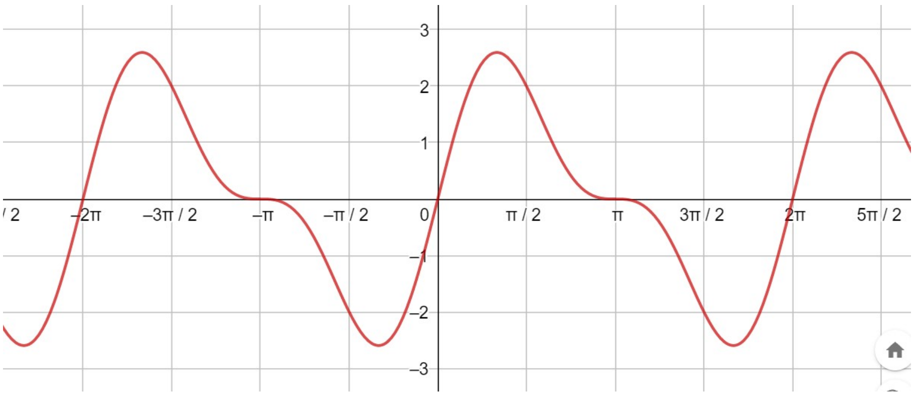
$$f'(x) = 2\cos x + 2\cos(2x) = 2 \cdot (\cos x + 2\cos^2 x - 1$$

Le trinôme $2t^2 + t - 1$ admet pour racine -1 et $1/2$. Il est donc positif pour tout t dans $]-\infty, -1] \cup [1/2, +\infty[$ et négatif pour $t \in [-1, 1/2]$.
f' est alors négative pour $\cos x$ dans $[-1, 1/2]$, ce qui correspond à $x \in [\pi/3, \pi]$, et f' est positive pour $x \in [0, \pi/3]$.
f est donc croissante sur $[0, \pi/3]$ et décroissante sur $[\pi/3, \pi]$.

3. On dresse le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$:

x	$-\pi$		$-\pi/3$		$\pi/3$		π
$\mathrm{sgn}(f'(x))$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-1.5\sqrt{3}$	$\nearrow$	$1.5\sqrt{3}$	$\searrow$	0

4. On trace la courbe représentative de f en utilisant la périodicité. On peut également la valeur de f en $\pm\pi/2$ et les déterminer les tangentes en 0 et $\pm\pi/2$.



Exercice 23 (Limites et asymptotes).

Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}$.

1. On note g la fonction définie par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$. Dresser le tableau de variations de g, et en déduire qu'il existe un et un seul réel x_0 tel que $g(x_0) = 0$. Déterminer x_0.
2. En déduire les variations de f.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Déterminer les asymptotes au graphe de f.
5. Tracer ce graphe et ses asymptotes, en veillant à faire figurer les tangentes remarquables.

Correction

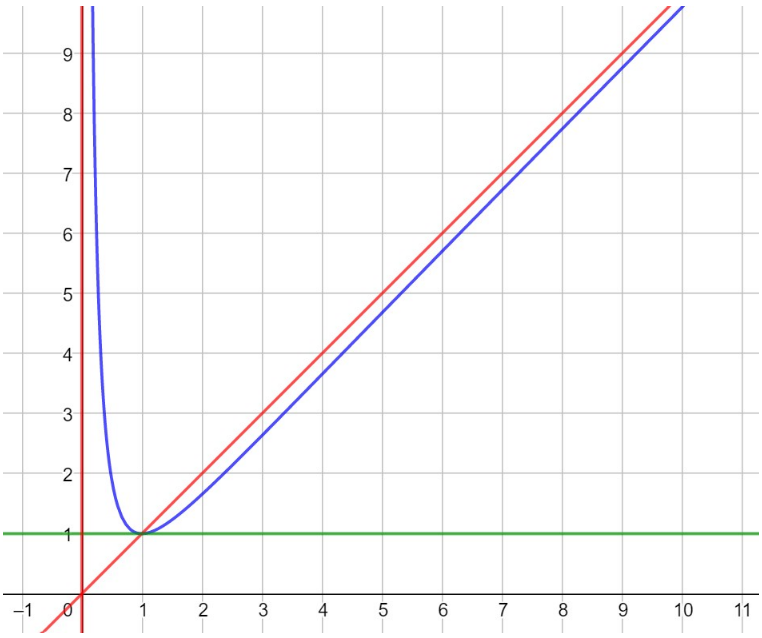
Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}$.

1. La fonction g est, comme f, définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Ces fonctions sont toutes deux continues sur leur ensemble de définition.
La fonction g est la somme de deux fonctions strictement croissantes, donc elle est strictement croissante. On détermine ses limites en $0+$ et en $+\infty$:

$$\lim_{x \to 0+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

Par le théorème de la bijection, g est une fonction continue et strictement monotone, donc elle est bijective et $]0, +\infty[$ sur son ensemble image $]-\infty, +\infty[$.
Il existe donc un unique réel x_0 tel que $g(x_0) = 0$.
On remarque que $g(1) = 0$, donc $x_0 = 1$.

2. La fonction f s'écrit comme la somme et le quotient de fonctions dérivbles, donc elle est dérivable sur son ensemble de définition.
   On calcule la dérivée de f : pour tout réel $x > 0$, on a :
$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{x \times \frac{1}{x} + \ln x}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$
   La dérivée de f est donc du signe de g. On en déduit que f est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.
3. On calcule les limites de f en $0+$ et en $+\infty$ en utilisant les limites de $(\ln x)/x$ en $0+$ et en $+\infty$:
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0+} f(x) &= 0 - \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x} \\ &= +\infty \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} x - \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \\ &= +\infty - 0 = +\infty \end{aligned}$$
4. En $+\infty$, $(\ln x)/x$ tend vers 0, donc la limite en $+\infty$ de $f(x) - x$ est nulle : la droite d'équation $y = x$ est l'asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.
   En $0+$, f tend vers $+\infty$, donc la droite $x = 0$ est l'asymptote à la courbe représentative de f en $0+$.
5. La dérivée de f s'annule en $x = 1$, et $f(1) = 1$, donc la courbe représentative de f admet une tangente horizontale au point $(1, 1)$ (en vert sur le graphique).
   On ajoute les deux asymptotes (en rouge).



Exercice 24 (Période)**.**
Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \sin^2 x + \frac{1}{2}\cos x.$$

1. Déterminer son ensemble de définition et sa plus petite période, et discuter sa parité. Au vu de ces informations, choisir un intervalle d'étude approprié.
2. Montrer qu'il existe un et un seul x_0 dans $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ pour lequel $\cos(x_0) = \frac{1}{4}$.
3. Étudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
4. Dresser le tableau de variations de f puis tracer son graphe.

Correction
Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \sin^2 x + \frac{1}{2}\cos x.$$

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Les fonctions sin et cos étant de période 2π, f est donc de période 2π. Elle n'est pas de période π car $f(0) = 1/2$ et $f(\pi) = -1/2$. Elle pourrait avoir une période plus petite (par ex. $2\pi/3$...) , mais on va voir que ce n'est pas le cas.
   La fonction f est paire, donc on peut se contenter de l'étudier sur $[0, \pi]$.
2. La fonction cos est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos(\pi/3) = 1/2$ et $\cos(\pi/2) = 0$. Le réel $1/4$ appartient bien à $[0, 1/2]$.
   Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires(ou théorème de la bijection) permet donc d'affirmer qu'il existe un unique x_0 tel que $\cos x_0 = 1/4$.
3. Calculons la dérivée de f : pour tout réel x, on a :
$$f'(x) = 2\sin x \ \cos x - \frac{1}{2}\sin x = 2\sin x \ \left(\cos x - \frac{1}{4}\right)$$
   Sur l'intervalle $[0, \pi]$, f' s'annule donc en 0, en x_0, et en π.
   f' est positive sur $[0, x_0]$ et négative sur $[x_0, \pi]$.
   f est croissante sur $[0, x_0]$ et décroissante sur $[x_0, \pi]$.
4. Avant de dresser le tableau de variation de f, on calcule $f(x_0)$: on sait que $\cos(x_0) = 1/4$ et x_0 appartient à $[0, \pi]$, donc $\sin x_0 = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \sqrt{15}/4$.
   On a donc $f(x_0) = \frac{15}{16} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{15}{16}$.

x	0		x_0		π
$\text{sgn}(f'(x))$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$	-0.5

   On peut alors tracer le graphe de f :