Correction Feuille 1 : Nombres réels

Exercice 1 (Automatismes - Puissances)**.**

Pour x et y des réels non nuls, et a et b des entiers, donner une autre écriture des expressions suivantes :

1. $(x^a)^b$
2. x^{a+b}
3. $(x \times y)^a$

Correction

1. $(x^a)^b = x^{a\times b}$ (pour tout x non nul si a ou b est négatif ; pour tout x réel si a et b sont positifs)
2. $x^{a+b} = x^a \times x^b$ (mêmes conditions d'existence)
3. $(x \times y)^a$

Exercice 2 (Automatismes - Simplifications)**.**

Simplifier et calculer les expressions suivantes :

1. $2^3 \times 2^2$
2. $5^3 \cdot 5^{-4}$
3. $\dfrac{3^2}{3^5}$
4. $\left(7^5\right)^3$
5. $\left(2^3\right)^{-2}$
6. $\dfrac{8^3}{4^3}$
7. $\dfrac{5^2 \times 10^3}{2^6}$
8. $\sqrt{3} \times \sqrt{6}$
9. $\dfrac{\sqrt{10}\,\sqrt{42}}{\sqrt{35}\,\sqrt{6}}$

Correction

1. $2^3 \times 2^2 = 2^5 = 32$
2. $5^3 \cdot 5^{-4} = 5^{-1} = \dfrac{1}{5} = 0.2$
3. $\dfrac{3^2}{3^5} = \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{27}$
4. $\left(7^5\right)^3 = 7^{15}$
5. $\left(2^3\right)^{-2} = \dfrac{1}{2^6} = \dfrac{1}{64}$
6. $\dfrac{8^3}{4^3} = 2^3 = 8$
7. $\dfrac{5^2 \times 10^3}{2^6} = \dfrac{5^5}{2^3}$
8. $\sqrt{3} \times \sqrt{6} = 3\sqrt{2}$
9. $\dfrac{\sqrt{10}\,\sqrt{42}}{\sqrt{35}\,\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{420}}{\sqrt{210}} = \sqrt{2}$

Exercice 3 (Automatismes - Simplification d'expressions)**.**

Soit x et y des réels ; en supposant qu'elle est bien définie, fournir une forme plus simple de chacune des expressions suivantes :

1. $(5x)^3$
2. $(-1)^{2001}$
3. $(-2y)^4$
4. $(4^2)^{\frac{1}{4}}$
5. $(125)^{-2/3}$
6. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}$
7. $\left(\dfrac{x^{-2}}{y^{-2}}\right)\left(\dfrac{x}{y}\right)^2$
8. $-2\sqrt{9y} + 10\sqrt{y}$
9. $\left[\left(x^2y^{-2}\right)^{-1}\right]^{-1}$
10. $5^{-1/2} \cdot 5x^{11/6} \cdot (5x)^{-3/2}$

Correction

1. $(5x)^3 = 5^3\,x^3 \; = \; 125x.$
2. $(-1)^{2001} = (-1)^{2000} \times (-1) = ((-1)^2)^{1000} \times (-1) = -1$
3. $(-2y)^4 = (-2)^4 \times y^4 = 16\ y$
4. $(4^2)^{1/4} = ((2^2)^2)^{1/4} = (2^4)^{1/4} = 2^{4/4} = 2.$
5. $\sqrt[3]{125} = 5$, d'où $(125)^{-2/3} = 1/25.$
6. On a $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}} \; = \; \left(27^{1/4}\right)^{1/3} \; = \; 27^{(1/4)\cdot(1/3)} \; = \; \left(27^{1/3}\right)^{1/4} \; = \; 3^{1/4} \; = \; \sqrt[4]{3}.$

7. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a
$$\frac{x^\alpha}{y^\alpha} = \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha ;$$
on en déduit que
$$\frac{x^{-2}}{y^{-2}} \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 1 .$$
8. $\sqrt{9y} = \sqrt{9}\sqrt{y}$; donc, on peut factoriser par $2\sqrt{y}$ et on trouve
$$-2\sqrt{9y} + 10\sqrt{y} = 2\sqrt{y}\left(5 - \sqrt{9}\right) = 4\sqrt{y} .$$
9. $\left[\left(x^2y^{-2}\right)^{-1}\right]^{-1} = \left(x^2y^{-2}\right)^{(-1\cdot(-1))} = x^2/y^2$.
10. On a
$$5^{-1/2} \cdot 5x^{11/6} \cdot (5x)^{-3/2} = 5^{-1/2+1-3/2}\, x^{11/6-3/2} = 5^{-1}\, x^{1/3} = \frac{\sqrt[3]{x}}{5} .$$

Exercice 4 (Automatismes - Inégalités)**.**
Résoudre les inéquations suivantes pour x réel :

1. $7x + 9 > 0$
2. $-3x \geq 2$
3. $10x - 1 \leq 5$
4. $-7x - 2 > 0$
5. $11x + 9 \leq -4$
6. $-3x - 2 \geq 7$

Correction

1. $7x + 9 > 0$ ssi $x > -9/7$
2. $-3x \geq 2$ ssi $x \leq -\dfrac{2}{3}$
3. $10x - 1 \leq 5$ ssi $x \leq \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5} = 0.6$
4. $-7x - 2 > 0$ ssi $x < -\dfrac{2}{7}$
5. $11x + 9 \leq -4$ ssi $x \leq -\dfrac{13}{11}$
6. $-3x - 2 \geq 7$ ssi $x \leq -3$

Exercice 5 (Inégalités)**.**
Vrai ? Faux ? Justifier !

1. Soient x et y deux réels. Si $x + y \leq 7$ et $x \leq 3$ alors $y \leq 4$.
2. Pour tout couple $(x, y) \in [-2, -1] \times [2, 4]$, on a $xy \geq -4$.
3. Pour tout couple $(x, y) \in [-2, 7] \times [-4, 1]$, on a $-28 \leq xy \leq 8$.

Correction

1. Soient x et y deux réels. Si $x + y \leq 7$ et $x \leq 3$ alors $y \leq 4$.
   C'est FAUX : on exhibe un contre-exemple. Si on choisit $x = 0$ et $y = 8$ alors on a $x + y \leq 7$ et $y > 4$. **On ne fait pas de différences d'inégalités.**
2. Pour tout couple $(x, y) \in [-2, -1] \times [2, 4]$, on a $xy \geq -4$.
   C'est FAUX : on exhibe un contre-exemple. Avec $x = -2$ et $y = 3$ on a $xy = -6 < -4$. **On ne multiplie des inégalités que si tous les termes sont positifs**.
3. Pour tout couple $(x, y) \in [-2, 7] \times [-4, 1]$, on a $-28 \leq xy \leq 8$.
   C'est VRAI. On peut aller plus vite que ce qui est proposé dans la correction ci-dessous, mais mieux vaut entraîner les étudiants à être rigoureux !
   On raisonne par disjonction de cas, suivant les signes de x et y :
   <u>1er cas</u> : Soient $x \in [0, 7]$ et $y \in [0, 1]$: alors
$$0 \leq x \leq 7$$
$$0 \leq y \leq 1$$
   Donc $0 \leq xy \leq 7$. On a bien $-28 \leq xy \leq 8$.

2ème cas Soient $x \in [-2, 0[$ et $y \in [0, 1]$. Alors

$$0 < -x \leq 2$$
$$0 \leq y \leq 1$$

Donc $0 \leq -xy \leq 2$, ou encore $-2 \leq xy \leq 0$.
On a bien à nouveau $-28 \leq xy \leq 8$.
3ème cas Soient $x \in [0, 7]$ et $y \in [-4, 0[$. Alors

$$0 < x \leq 7$$
$$0 < -y \leq 4$$

Donc $0 \leq -xy \leq 28$ et $0 \geq xy \geq -28$.
On a bien à nouveau $-28 \leq xy \leq 8$.
4ème cas Soient $x \in [-2, 0[$ et $y \in [-4, 0[$. Alors

$$0 < -x \leq 2$$
$$0 < -y \leq 4$$

Donc $0 \leq xy \leq 8$.
On a bien à nouveau $-28 \leq xy \leq 8$.
L'ensemble des cas étudiés regroupent l'ensemble des cas possibles, donc on peut conclure que pour tout couple $(x, y) \in [-2, 7] \times [-4, 1]$, on a $-28 \leq xy \leq 8$.

Exercice 6 (Signe du trinôme)**.**
Résoudre les inéquations suivantes pour x réel :

1. $x^2 - 2x + 1 \geq 0$
2. $x^2 - 2x + 1 > 0$
3. $x^2 + 2x - 3 \leq 0$
4. $-x^2 + 5x + 14 > 0$
5. $-x^2 - 10x - 25 > 0$
6. $-x^2 + 14x - 49 < 0$

Correction

1. On reconnaît une inégalité remarquable dans le membre de gauche : pour tout réel x, on a $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$.
Le carré d'un nombre réel étant toujours un réel positif ou non, on en déduit que, pour tout réel x, $x^2 - 2x + 1 \geq 0$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $\mathbb{R}$.
2. On reconnaît la même identité remarquable que dans la question précédent : on conclut alors facilement qu'un réel x vérifie $x^2 - 2x + 1 > 0$ si et seulement si $x - 1$ est non nul. L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $R\backslash\{1\}$, qui peut s'écrire également $]-\infty, 1[\cup]-1, +\infty[$.
3. On cherche à factoriser $x^2 + 2x - 3$, et pour cela, on détermine les racines du trinôme. On peut bien sûr calculer le discriminant, mais c'est plus rapide de remarquer que 1 est racine, et que le produit des racines est égal à -3. Les racines de ce trinôme sont donc 1 et -3.
On a donc, pour tout réel x, $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)\ (x + 3)$.
Il reste à faire le tableau de signes pour en déduire que $x^2 + 2x - 3 \leq 0$ si et seulement si x appartient à $[-3, 1]$.
4. On calcule le discriminant du trinôme : $\Delta = 25 + 4 \times 14 = 81$, donc ses racines sont
$$x_1 = \frac{-5 - 9}{-2} = 7 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-5 + 9}{-2} = -2$$
On a donc, pour tout réel x :
$$-x^2 + 5x + 14 = -(x - 7)\ (x + 2).$$
On dresse le tableau de signes pour conclure : $-x^2 + 5x + 14 > 0$ ssi $x \in]-2, 7[$.
A retenir : un trinôme est du signe opposé à celui de son coefficient de degré 2 entre les racines.

5. On reconnaît une identité remarquable : Pour tout réel x, on a $-x^2-10x-25=-(x+5)^2$, donc $-x^2-10x-25$ est toujours positif. L'ensemble des solutions de l'inéquation $-x^2-10x-25>0$ est l'ensemble vide.
6. On reconnaît une identité remarquable : pour tout réel x, on a $-x^2+14x-49=-(x-7)^2$.
   On en déduit que $-x^2+14x-49<0$ si et seulement si x est différent de 7.
   L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathbb{R}\backslash\{7\}=-\infty,7[,\cup]7,+\infty[$.

Exercice 7. 1. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $-3x+4\geq x-3$.

2. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^2-4x-2\geq 0$.
3. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $(x+2)^2<-x$.
4. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^3-6x\geq x^2$.

<u>**Correction**</u>

1. Un calcul simple permet de trouver $4x\leq 7$, d'où $x\leq 7/4$.
2. Ça suffit de chercher les racines du polynôme x^2-4x-2, qui sont $2\pm\sqrt{6}$. L'inégalité est alors vérifiée pour tous les nombres réels x tels que $x\leq 2-\sqrt{6}$ ou $x\geq 2+\sqrt{6}$
3. On développe le carré et on amène x à gauche : on trouve $x^2+5x+4<0$. On remarque que $x^2+5x+4=(x+4)(x+1)$, et alors $-4<x<-1$.
4. L'inégalité à résoudre est équivalente à $x^3-x^2+6x\geq 0$. On peut factoriser le membre de gauche de la façon suivante : $x^3-x^2+6x = x(x^2-x-6) = x(x-3)(x+2)$. Un tableau de signes permet de trouver la solution $\big\{x\in\mathbb{R}\,\big|\,-2\leq x\leq 0 \text{ ou } x\geq 3\big\}$.

Exercice 8. 1. Déterminer l'ensemble des $x\in\mathbb{R}\setminus\{-\frac{5}{6}\}$ qui vérifient $\dfrac{-2}{6x+5}>1$.

2. Déterminer l'ensemble des $x\in\mathbb{R}\setminus\{2,-\frac{2}{3}\}$ qui vérifient $\dfrac{1}{x-2}<\dfrac{2}{3x+2}$.

<u>**Correction**</u>

1. On amène le terme de gauche à droite : l'inégalité est donc équivalente à résoudre
$$1+\frac{2}{6x+5}<0\,.$$
   On calcule le dénominateur en commun, et on trouve
$$\frac{6x+7}{6x+5}<0\,.$$
   En dressant un tableau de signes, on conclut que l'inégalité est vérifiée pour $x\in]-7/6,-5/6[$.
2. L'argument est tout à fait analogue au précédent : on amène le terme de gauche à droite et on calcule le dénominateur en commun. Après avoir multiplié par -1 pour se retrouver avec un coefficient de x positif au numérateur, on se retrouve à résoudre l'inégalité équivalente
$$\frac{x+6}{(3x+2)(x-2)}<0\,.$$
   On résout cette inégalité en dressant un tableau de signe, et on trouve l'ensemble des solutions $S=]-\infty,-6[\cup]-2/3,2[$.

Exercice 9. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient

1. $|2-x|\leq 3-x$.
2. $|x+2|=|x-7|$.
3. $|x-9|<|x-7|$.
4. $2|x-4|<|x+2|$.

<u>**Correction**</u>

1. On sépare l'étude dans les deux cas suivants.
   (i) Si $2 - x \geq 0$, alors l'inégalité devient
   $$2 - x \leq 3 - x \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2 \leq 3\,,$$
   ce qui est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$. Mais x doit vérifier $x \leq 2$, donc l'ensemble des solutions de la première inégalité est $]-\infty, 2]$.
   (ii) si $2 - x < 0$, alors on trouve
   $$-2 + x \leq 3 - x \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2x \leq 5\,,$$
   ce qui est vrai pour $x \leq 5/2$. Mais x devait être plus grande que 2, donc la deuxième inégalité est vérifiée pour tout $x \in [2, 5/2]$.
   En conclusion, l'inégalité est satisfaite pour tout $x \in]-\infty, 5/2]$.

   <u>Correction bis</u> Soient A et B deux réels. On sait que $|A| \leq B$ si et seulement si $-B \leq A \leq B$.
   On applique cette propriété dans le contexte de l'exercice :
   Soit x un réel.
   On a $|2 - x| \leq 3 - x$ ssi $-(3 - x) \leq 2 - x \leq 3 - x$.
   Or $-(3 - x) \leq 2 - x$ ssi $2x \leq 5$
   et $2 - x \leq 3 - x$ ssi $2 \leq 3$ (qui est toujours vrai)
   On conclut donc que $|2 - x| \leq 3 - x$ ssi $x \leq \dfrac{5}{2}$.
   L'ensemble des solutions de l'inéquation $|2 - x| \leq 3 - x$ est donc $\left]-\infty, \dfrac{5}{2}\right]$.
2. Avec les mains : soit x un réel. On a $|x + 2| = |x - 7|$ ssi x est à égale distance de 7 et de -2, donc ssi $x = 5/2$. L'ensemble des solutions est $\{5/2\}$.
   En détaillant suivant le signe de $x - 7$ et de $x + 2$: Soit x un réel.

1er cas Soit $x \leq -2$. Alors $x \leq 7$ et l'équation s'écrit $-x - 2 = -x + 7$, ce qui est impossible.
2ème cas Soit $x \in]-2, 7]$. Alors l'équation s'écrit $x+2 = -x+7$ ce qui équivaut à $x = 5/2$ et $5/2$ appartient à $[-2, 7]$.
3ème cas Soit $x \in]7, +\infty[$. Alors l'équation s'écrit $x + 2 = x - 7$ ce qui est impossible.

   On retrouve donc que l'ensemble des solutions est donc $\{5/2\}$.
3. On peut raisonner aussi en termes de « proximité », mais avec sans doute plus de risque d'erreurs pour les étudiants. Donc on raisonne plutôt par disjonction de cas.
   Soit x un réel.

1er cas Supposons $x \leq 7$. Alors l'inéquation s'écrit $9 - x < 7 - x$, ce qui est impossible.
2ème cas Supposons $x \in]7, 9]$. L'inéquation s'écrit $9 - x < x - 7$, ce qui équivaut à $x > 8$. L'ensemble des réels de $]7, 9]$ vérifiant $|x - 9| < |x - 7|$ est donc $]8, 9]$.
3ème cas Supposons $x > 9$. L'inéquation s'écrit $x - 9 < x - 7$, ce qui est toujours vrai. L'ensemble des réels de $]9, +\infty[$ vérifiant $|x - 9| < |x - 7|$ est donc $]9, +\infty[$.

   Conclusion : l'ensemble des réels x vérifiant $|x - 9| < |x - 7|$ est l'intervalle $]8, +\infty[$.
4. On raisonne par disjonction de cas. Soit x un réel.

1er cas Supposons $x \leq -2$. Alors l'inéquation s'écrit $2(4 - x) < -x - 2$, ce qui équivaut à $x > 10$, et est donc impossible sur l'intervalle $]-\infty, -2]$.
2ème cas Supposons $x \in]-2, 4]$. Alors l'inéquation s'écrit $2(4 - x) < x + 2$, ce qui équivaut à $x > 2$. Donc l'intervalle $]2, 4]$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation sur $]-2, 4]$.
3ème cas Supposons $x > 4$. Alors l'inéquation s'écrit $2(x - 4) < x + 2$, ce qui équivaut à $x \leq 10$. Donc l'intervalle $]4, 10[$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation sur l'intervalle $]4, +\infty[$.

   Conclusion : L'ensemble des réels x solutions de $2|x - 4| < |x + 2|$ est l'intervalle $]2, 10[$.

Exercice 10. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leq \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.

<u>Correction</u>

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On calcule

$$0 \leq (x+y)^2 \; = \; x^2+y^2+2xy\,.$$

De la même manière, on a aussi

$$0 \leq (x-y)^2 \; = \; x^2+y^2-2xy\,.$$

Donc, en mettant ensemble ces deux inégalités, on trouve

$$-(x^2+y^2) \leq 2xy \leq x^2+y^2$$

ce qui est équivalent à dire que $2|xy| \leq x^2+y^2$.

Exercice 11. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $|1-x^4| \leq 4|1-x|$.

<u>Correction</u> On commence par remarquer que

$$1-x^4 \; = \; (1-x^2)\,(1+x^2) \; = \; (1-x)\,(1+x)\,(1+x^2)\,.$$

En utilisant le fait que $|ab| = |a|\,|b|$, on peut amener le terme de droite à gauche du signe d'inégalité et on peut mettre en facteur $|1-x|$: cela donne

$$|1-x|\,\big(|1+x|\,|1+x^2| \, - \, 4\big) \leq 0\,.$$

Maintenant, $|1-x| \geq 0$ pour tout x, donc cela suffit de résoudre

$$|1+x|\,|1+x^2| \, - \, 4 \; \leq \; 0\,.$$

On note que, pour $x \in [-1,1]$, les deux arguments de la valeur absolue sont positifs : en développant les produits, on trouve donc

$$x^3+x^2+x+1-4 \leq 0\,.$$

Étant donné que $x \in [-1,1]$, par inégalité triangulaire on a que

$$x^3+x^2+x \; \leq \; |x^3+x^2+x| \; \leq \; |x|^3+|x|^2+|x| \; \leq \; 3\,,$$

qui dit que l'inégalité de départ est toujours vérifiée pour $x \in [-1,1]$.

Plus simple : Pour $x = 1$, l'inégalité est vérifiée, et pour tout $x \neq 1$, on a

$$\frac{1-x^4}{1-x} = 1+x+x^2+x^3 \qquad \text{[somme partielle d'une suite géométrique].}$$

Donc, pour tout x de $[-1,1[$, l'inégalité équivaut à $|x^3+x^2+x+1| \leq 4$, ce qui est trivialement vrai.

Exercice 12. Pour x réel, on note $f(x) = |2-|1-x||$. Exprimer $f(x)$ sans utiliser de valeur absolue en discutant selon la position de x sur l'axe réel, et tracer le graphe de f.

<u>Correction</u>

<u>Premier cas</u> : $1-x \geq 0$, c'est-à-dire $x \leq 1$. Dans ce cas, $f(x) = |2-(1-x)| = |1+x|$. Si en plus $1+x \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -1$, alors $f(x) = 1+x$.

Si, au contraire, $x < -1$, on trouve $f(x) = -x-1$.

<u>Deuxième cas</u> : si $1-x < 0$, c'est-à-dire $x > 1$, alors $f(x) = |2+(1-x)| = |3-x|$. Si maintenant $x \leq 3$, alors $f(x) = 3-x$; si $x > 3$, on a $f(x) = x-3$.

<u>Conclusion</u> : Pour $x < -1$, on a $f(x) = -x-1$. Pour $-1 \leq x \leq 1$, on a $f(x) = 1+x$. Pour $1 < x \leq 3$, on a $f(x) = 3-x$. Enfin, si $x > 3$, on a $f(x) = x-3$.

Exercice 13. Expliciter trois réels a, b et c tels que pour tout réel x on ait :

$$x^3 - x^2 + 2x + 4 = (x+1)(ax^2 + bx + c)$$

puis en déduire l'ensemble des x réels pour lesquels $x^3 - x^2 + 2x + 4 > |x+1|$.

Correction

En développant les produits à droite, on trouve l'égalité

$$x^3 - x^2 + 2x + 4 \;=\; ax^3 \;+\; (a+b)x^2 \;+\; (b+c)x \;+\; c\,.$$

On en déduit que

$$a = 1\,, \quad a+b = -1\,, \quad b+c = 2\,, \quad c = 4\,,$$

c'est-à-dire $a = 1$, $c = 4$ et $b = -2$.

Pour telles valeurs de (a, b, c), on a une factorisation de $x^3 - x^2 + 2x + 4$:

$$x^3 - x^2 + 2x + 4 \;=\; (x+1)\,(x^2 - 2x + 4)\,.$$

On remarque que $x^2 - 2x + 4 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (soit on calcule les racines réelles par la formule, soit on reconnaît que ce terme est de la forme $a^2 + ab + b^2$). L'inégalité à résoudre devient alors

$$(x+1)\,(x^2 - 2x + 4) \;>\; |x+1|\,.$$

Vu que le terme de droite est positif et que $x^2 - 2x + \geq 0$, on doit avoir forcement $x + 1 > 0$, c'est-à-dire $x > -1$. En utilisant cette remarque, on va résoudre alors

$$(x+1)\,(x^2 - 2x + 4) \;>\; x+1 \qquad \Longrightarrow \qquad (x+1)\,(x^2 - 2x + 3) \;>\; 0\,.$$

Encore une fois, $x + 1 > 0$; en plus, et donc il faut résoudre $x^2 - 2x + 3 > 0$. Le polynôme $x^2 - 2x + 3$ a seulement des racines complexes, autrement dit la dernière inégalité est toujours vraie. L'ensemble des solutions est donc $\,]-1, +\infty[\,$.

Exercice 14 (Inéquations et équations)**.**

1. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0$.
2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} - \{-1, 3\}$ qui vérifient $\dfrac{x-6}{3-x} < \dfrac{x+6}{x+1}$.
3. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|x-3| + |x-7| = 4$.
4. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|x-1| + |x-2| < 1$.

Correction

1. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0$.
   On considère le trinôme $y^2 - 13y + 36$. Son discriminant est $\Delta = 169 - 144 = 25$, donc ses racines sont $\dfrac{13-5}{2} = 4$ et $\dfrac{13+5}{2} = 9$.
   On a donc, pour tout réel y, $y^2 - 13y + 36 = (y-5)\;(y-9)$.
   On peut ensuite réaliser un tableau de signes pour en déduire que $y^2 - 13y + 36 \geq 0$ pour tout y de $]-\infty, 5] \cup [9, +\infty[$.
   Revenons à l'inéquation initiale : Pour tout réel x, on a $x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2)^2 - 13(x^2) + 36$ Donc $x^4 - 13x^2 + 36 \geq 0$ ssi x^2 appartient à $]-\infty, 5] \cup [9, +\infty[$.
   L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^4 - 13x^2 + 36 \geq 0$ est donc $]-\infty, 3] \cup [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] \cup [3, +\infty[$.
2. Le plus simple est de commencer par mettre les deux fractions dans le même membre de l'inégalité et de calculer leur somme. Il restera alors à réaliser un tableau de signes.
   Soit $x \in \mathbb{R} - \{-1, 3\}$.
   On a $\dfrac{x-6}{3-x} < \dfrac{x+6}{x+1}$ ssi $\dfrac{x+6}{x+1} - \dfrac{x-6}{3-x} > 0$.
   Or

$$\frac{x+6}{x+1} - \frac{x-6}{3-x} = \frac{(x-3)(x+6) + (x+1)(x-6)}{(x+1)(x-3)} = \frac{x^2 + 3x - 18 + x^2 - 5x - 6}{(x+1)(x-3)} = \frac{2(x^2 - x - 12)}{(x+1)(x-3)}$$

Le discriminant du trinôme $x^2 - x - 12$ est égal à 49 et ses racines sont $\frac{1-7}{2} = -3$ et $\frac{1+7}{2} = 4$.

On a donc $\frac{x+6}{x+1} - \frac{x-6}{3-x} = \frac{(x+3)(x-4)}{(x+1)(x-3)}$.

Il reste alors à réaliser le tableau de signes et on obtient que $\frac{x-6}{3-x} < \frac{x+6}{x+1}$ ssi $x \in]-\infty, -3[\cup]-1, 3[\cup]4, +\infty[$

3. On étudie $|x-3| + |x-7|$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 3]$, $[3, 7]$ et $[7, +\infty[$.
   - Pour tout x dans $]-\infty, 3]$, on a $|x-3| + |x-7| = -2x + 10$
     Donc $|x-3| + |x-7| = 4$ ssi $-2x + 10 = 4$, ie $x = 3$.
   - Pour tout x dans $[3, 7]$, on a : $|x-3| + |x-7| = 4$, donc tout réel de $[3, 7]$ est solution.
   - Pour tout x dans $[7, +\infty[$, on a : $|x-3| + |x-7| = 2x - 10$ et $2x - 10 = 4$ ssi $x = 7$.

   On peut donc conclure que l'ensemble des solutions de $|x-3| + |x-7| = 4$ est l'intervalle $[3, 7]$.
4. On étudie $|x-1| + |x-2|$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 1]$, $[1, 2]$ et $[2, +\infty[$.
   - Pour tout x dans $]-\infty, 1]$, on a $|x-1| + |x-2| = -2x + 3$.
     Or $-2x+3 < 1$ ssi $x > 1$. Mais on ne cherche que les solutions dans $]-\infty, 1]$, donc c'est impossible.
   - Pour tout x dans $[1, 2]$, on a : $|x-1| + |x-2| = 1$, donc aucun réel de $[1, 2]$ n'est solution.
   - Pour tout x dans $[2, +\infty[$, on a : $|x-1| + |x-2| = 2x - 3$ et $2x - 3 < 1$ ssi $x < 1$.
     Aucun réel de $[2, +\infty[$ n'est donc solution de $|x-1| + |x-2| < 1$.

   En conclusion, l'ensemble des solutions de $|x-1| + |x-2| < 1$ est l'ensemble vide.
   Remarque : on peut aussi tracer la fonction $x \mapsto |x-1| + |x-2|$.

Exercice 15. 1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère les réels $A = \frac{a^4 - 7a^2 + 4}{3}$ et $B = \frac{a^4 - 9a^2 + 5}{4}$. Montrer que l'un de ces deux nombres (on précisera lequel) est toujours plus grand que l'autre.

2. Soit m et n deux réels. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère les réels $C = \frac{a^4 + ma^2 + 2}{3}$ et $D = \frac{a^4 + na^2 + 3}{4}$. Montrer que le signe de $D - C$ n'est pas constant quand a varie dans $\mathbb{R}$.

Correction

1. On impose la rélation $A \leq B$. Après des calculs simples, on se reconduit à l'inégalité $a^4 - a^2 + 1 \leq 0$. Maintenant, en posant $a^2 = y$, c'est facile à voir que cette inégalité n'est jamais satisfaite (pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $y^2 - y + 1 > 0$). Donc, on en déduit que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $A > B$.
2. On calcule
$$D - C = \frac{1}{12}\left(-a^4 + (3n - 4m)\, a^2 + 1\right).$$
   Maintenant, pour $a = 0$, $D - C = 1/12 > 0$. Pour $a \to +\infty$, par contre, $D - C \to -\infty$, donc le signe de $D - C$ n'est pas constant.

Exercice 16 (Moyennes)**.**

Soit x et y deux réels tels que $0 < x \leq y$. On pose :
$$m = \frac{x+y}{2}, \qquad g = \sqrt{xy}, \qquad h = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$
L'objectif de l'exercice est de montrer la chaîne d'inégalités : $x \leq h \leq g \leq m \leq y$.

1. Montrer que $m \leq y$.
2. Montrer que $g \leq m$.
3. Montrer que $x \leq h$. (Indication : on pourra chercher à comparer $1/x$ et $1/h$).
4. Montrer que $h \leq g$.

Correction

Soient x et y deux réels vérifiant $y \geq x \geq 0$.

1. On a supposé que $x \leq y$, donc $x + y \leq 2y$, d'où $m \leq y$.
2. On remarque que $(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 = y + x - 2\sqrt{xy}$, donc $y + x - 2\sqrt{xy}$ est positif, et $m \geq g$.
3. On a
$$\frac{1}{h} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} - \frac{1}{x} = \frac{x-y}{2xy} \leq 0.$$
Donc
$$0 < \frac{1}{h}\frac{1}{x} \qquad \text{et } x \leq h.$$
4. Calculons le quotient g/h :
$$\begin{aligned}\frac{g}{h} &= \frac{\sqrt{xy}}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{x+y}{\sqrt{xy}} = \frac{m}{g}.\end{aligned}$$
Or, on a a déjà montré que $m \geq g$, donc on peut conclure que $h \leq g$.
Finalement, pour tous réels $y \geq x > 0$, on a bien,
$$x \leq h \leq g \leq m \leq y.$$

Exercice 17 (Simplification d'intervalles)**.**
Simplifier les intervalles suivants.

1. $[1, 5] \cap [2, 6[$;
2. $[1, 5] \cup [2, 6[$;
3. $]-\infty, 3] \cap [0, +\infty[$;
4. $]-\infty, 3] \cup [0, +\infty[$;
5. $[-2, 3[\cup\{3\}$;
6. $[-2, 3[\cap\{3\}$;
7. $[1, 2] \cap [5, 6[$;
8. $[1, 2] \cup [5, 6[$;
9. $([-6, 8] \cup [4, 6[) \cap [7, 10[$;

__**Correction**__

1. $[1, 5] \cap [2, 6[= [2, 5]2$;
2. $[1, 5] \cup [2, 6[= [1, 6[$;
3. $]-\infty, 3] \cap [0, +\infty[= [0, 3]$;
4. $]-\infty, 3] \cup [0, +\infty[= \mathbb{R}$;
5. $[-2, 3[\cup\{3\} = [-2, 3]$;
6. $[-2, 3[\cap\{3\} = \emptyset$;
7. $[1, 2] \cap [5, 6[= \emptyset$;
8. $[1, 2] \cup [5, 6[= \{x \in \mathbb{R}, 1 \leq x \leq 2 \text{ ou } 5 \leq x < 6\}$.
Ce n'est pas un intervalle ! ;
9. $([-6, 8] \cup [4, 6[)\cap[7, 10[= [-6, 8]\cap[7, 10[= [7, 8]$;

Exercice 18 (Intervalles)**.** Soient $a \leq b$ et $c \leq d$ des réels. On note $I = [a, b]$ et $J = [c, d]$.

1. Montrer que $I \cap J$ est toujours un intervalle.
2. Sous quelle condition $I \cup J$ est-il un intervalle ?
3. Trouver deux parties A et B de $\mathbb{R}$ telles que $A \cap B$ soit un intervalle, sans que ni A, ni B ne soient un intervalle. Même question pour $A \cup B$.
4. Reprendre les questions 1 et 2 avec deux intervalles quelconques I et J.

__**Correction**__

Il est vivement conseillé de faire des schéma représentant les intervalles !

1. Soit x un réel. On a $x \in I \cap J$ si et seulement si x vérifie les quatre conditions $a \leq x$, $x \leq b$, $c \leq x$ et $x \leq d$.
Ce qui équivaut à $x \geq \max(a, c)$ et $x \leq \min(b, d)$.
On aboutit à deux cas :
   — Si $\max(a, c) > \min(b, d)$, ce qui est le cas si $b < c$ ou si $d < a$, alors $I \cap J$ est l'ensemble vide donc c'est un intervalle $]a, a[$.
   — Sinon, on a $I \cap J = [\max(a, c), \min(b, d)]$, qui est bien un intervalle.

On peut conclure que $I \cap J$ est toujours un intervalle (éventuellement vide).

2. $I \cup J$ est un intervalle si et seulement si $I \cap J$ est non vide.
   En effet, supposons par exemple $a \leq c$.
   On peut distinguer trois cas suivant les positions respectives de b, c et d.
   — Si $b < c \leq d$: alors tout réel x de $]b, c[$ n'appartient pas à $I \cup J$. On constate donc que $I \cup J$ n'est pas un intervalle et que $I \cap J$ est vide.
   — Si $c \leq b \leq d$: alors tout réel de l'intervalle $[a, d]$ est soit compris entre a et b, soit compris entre c et d. On a donc $I \cup J = [a, d]$ et $I \cap J$ est effectivement non vide.
   — Si $a \leq c \leq d < b$: alors $I \cup J = [a, b]$ et $I \cap J = [c, d]$ est non vide.
3. Par exemple, on choisit $A = [0, 1] \cup 10$ et $B = [0, 1] \cup 12$. Alors A et B ne sont pas des intervalles et $A \cap B = [0, 1]$ est un intervalle.
   Avec $C = [0, 1] \cup \mathbb{Q}$ et $D = [0, 1] \backslash C$, on a un exemple de deux parties qui ne sont aps des intervalles et dont la réunion forme un intervalle.

Exercice 19 (Majorant)**.**

1. Rappeler la définition d'une partie A majorée de $\mathbb{R}$.
2. Quels sont les majorants de $[0, 1]$? De $[0, 1[$?
3. Donner un exemple de partie non majorée de $\mathbb{R}$.
4. On se donne deux parties majorées A et B de $\mathbb{R}$. Le majorant de $A \cup B$ est-il un majorant de A et de B ? Que peut-on dire d'un majorant de $A \cap B$?

Correction

1. Une partie A de $\mathbb{R}$ est majorée s'il existe un réel M tel que, pour tout x dans A, on ait $x \leq M$.
2. Les majorants de $[0, 1]$ sont tous les réels supérieux ou égaux à 1, donc tous les réels de l'intervalle $[1, +\infty[$.
   Les majorants de $[0, 1[$ sont également tous les réels de $[1, +\infty[$.
3. $\mathbb{R}^+$ est une partie de $\mathbb{R}$ non majorée. On peut penser par exemple aussi à $\mathbb{N}$, ou à $\{n^2, n \in \mathbb{N}\}$.
4. C'est vrai : soit M un majorant de $A \cup B$.
   Pour tout $x \in A$, on a $x \in A \cup B$, donc $x \leq M$: le réel M est donc bien un majorant de A.
   On peut montrer de même qu'il est un majorant de B.
   On ne peut rien dire sur les majorants de A ou B à partir d'un majorant de $A \cap B$. On peut simplement montrer que si $A \cap B$ n'est pas majoré, alors ni A, ni B ne sont majorés.

Exercice 20 (Maximum)**.**

1. Rappeler la définition du maximum d'une partie de $\mathbb{R}$.
2. Une partie de $\mathbb{R}$ peut-elle admettre plusieurs maximums (distincts) ?
3. Montrer que toute partie A de $\mathbb{R}$ admettant un maximum est majorée.
4. Écrire une assertion exprimant qu'une partie A de $\mathbb{R}$ n'admet pas de maximum.
5. Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ admettant un maximum, est-ce que $A \cap B$ et $A \cup B$ admettent des maximums ?

Correction

1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Un réel M est le maximum de A si M appartient à A et si M est un majorant de A.
2. Le maximum d'une partie A de $\mathbb{R}$, s'il existe, est unique.
   Considérons deux maximums M_1 et M_2 de A.
   Alors, par définition du maximum : M_2 étant le maximum de A, on a M_2 appartient à A, et donc M_1, qui est un maximum de A, lui est supérieur : $M_1 \geq M_2$.
   De même, $M_2 \geq M_1$.
   On peut alors conclure que $M_1 = M_2$: le maximum, s'il existe, est unique.

3. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ admettant un maximum, que l'on note M. Alors, par définition du maximum, pour tout $x \in A$, on a $x \leq M$, donc M est un majorant de A.
   Toute partie de $\mathbb{R}$ qui admet un maximum est donc majorée.
4. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
   A n'admet pas de maximum si, pour tout $x \in A$, il existe un réel y de A tel que $y > x$.
5. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ admettant un maximum que l'on note M_A (resp. M_B).
   On considère $K = \max(M_A, M_B)$. Alors, K appartient à $A \cup B$, et tout élément de A (resp. de B) est inférieur ou égal à K. Donc K est un majorant de $A \cup B$.
   On peut donc conclure que K est le maximum de $A \cup B$.
   En ce qui concerne $A \cap B$: le même réel K est un majorant de $A \cap B$, mais il n'a aucune raison d'être son maximum.
   On peut trouver des contrexemples pour lesquels A et B admettent un maximum et $A \cap B$ n'es admet pas. Il suffit par exemple de choisir deux intervalles fermés bornés et disjoints. L'ensemble vide n'admet pas de maximum.
   Ou alors : $A = [0,1[\cup\{2\}$ et $B = [0,1[\cup\{3\}$. Alors : 2 est le maximum de A, et 3 est celui de B mais $A \cap B = [0,1[$ n'admet pas de maximum.

Exercice 21 (Majorant, minorant, borne supérieure, borne inférieure, maximum, minimum).

Pour les ensembles suivants, dire s'ils sont majorés, minorés, et s'ils admettent une borne supérieure, une borne inférieure, un maximum et un minimum.

1. $A = \{4, -5, 10, -9, 21, 0, -3\}$;
2. $B = [-1, 3]$;
3. $C = [0, +\infty[$;
4. $D =]0, +\infty[$;
5. $E = \left\{x \in \mathbb{R},\, x^2 < 4\right\}$;
6. $F = \{n \in \mathbb{N},\, 4 \leq 2^n \leq 1024\}$;
7. $G = \left\{x \in \mathbb{R}^*,\, \dfrac{1}{x} \geq 2\right\}$;
8. $H = \left\{\dfrac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

__Correction__

1. $A = \{4, -5, 10, -9, 21, 0, -3\}$ est majoré et minoré, admet un maximum (21), un minimum (-9) (donc une borne sup et une borne inf).
2. $B = [-1, 3]$ est majoré, minoré, admet un maximum (3) et un minimum (-1), (donc une borne sup est une borne inf) ;
3. $C = [0, +\infty[$ est minoré, admet une borne inf qui est aussi son minimum. N'est pas majoré, n'admet pas de maximum, ni de borne sup. ;
4. $D =]0, +\infty[$ est minoré, admet une borne inf (0) mais pas de minimum. N'est pas majoré, n'admet pas de maximum, ni de borne sup.
5. $E = \left\{x \in \mathbb{R},\, x^2 < 4\right\}$ est l'intervalle $]2, 2[$: il est majoré, minoré, admet une borne sup (2) et une borne inf (-2), mais pas de maximum, ni de minimum.
6. $F = \{n \in \mathbb{N},\, 4 \leq 2^n \leq 1024\}$ est l'ensemble $\{2, \ldots, 10\}$. Il est minoré et majoré, admet une borne inf et un minimum (2), une borne sup et un maximum (10).
7. $G = \left\{x \in \mathbb{R}^*,\, \dfrac{1}{x} \geq 2\right\}$ est l'ensemble $\mathbb{R}^{-*} \cup]0, 1/2[$. Il n'est pas minoré, n'admet ni borne inf, ni minimum. Il est majoré, admet une borne sup (1/2) mais pas de maximum.
8. $H = \left\{\dfrac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ admet un pour maximum (donc borne sup aussi) et est majoré. Il est minoré, admet une borne inf (0) mais pas de minimum.