Programme de L1/L2

Algèbre 1 – 6 ECTS [24h CM, 36h TD]

- **Algèbre 1.A**

- Calculs algébriques : manipulation des sommes et des produits de familles finies de nombres réels, sommes et produits télescopiques, sommes géométriques, factorisation de a^n-b^n par a-b, factorielle et coefficients binomiaux, formule du binôme de Newton, sommes doubles et produit de deux sommes finies.
- **Logique** : connecteurs « et » et « ou », quantificateurs, implications, contraposition, équivalences, négation, types de preuves : disjonction de cas, contraposition, absurde, analyse-synthèse, récurrence. Principes de rédaction. Illustrer avec des exemples issus du lycée. Il s'agit de donner le vocabulaire et les notations. La manipulation se fera au fur et à mesure des UE de première année.
- Ensemble : Notion intuitive d'ensemble, d'éléments et d'appartenance, inclusion, parties, opérations : union, intersection, complémentaire, produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles, ensemble des parties d'un ensemble (recouvrement, partition). Il s'agit de donner le vocabulaire et les notations, la manipulation se fera au fur et à mesure des UE de première année. L'interprétation combinatoire de coefficient binomial "k parmi n" comme le nombre de k-parties d'un ensemble à n éléments. Triangle de Pascal.
- Applications : image directe, image réciproque, injectivité, surjectivité, bijectivité, composition.
- Nombres entiers et arithmétique : (Z/nZ hors programme) Divisibilité, diviseurs, multiples, division euclidienne, congruences, pgcd, ppcm, algorithme d'Euclide. Identité de Bézout, théorème de Gauss, équations ax + by = c. Nombres premiers, décomposition en facteurs premiers. Bases de la numération. Relations d'équivalence (la notion d'ensemble quotient est hors programme).

- **Algèbre 1.B**
- Nombres complexes : (la construction de C est hors programme) forme algébrique (parties réelle et imaginaire), opérations, conjugaison, module, inégalité triangulaire, argument, exponentielle complexe, forme trigonométrique, formule d'Euler, formule de Moivre. Rappels et applications à la trigonométrie : linéarisation / polynomialisation. Racines nièmes. Extension au cas complexe des sommes géométriques, de la factorisation de a^n-b^n par a-b et de la formule du binôme de Newton.
- Interprétation géométrique des complexes : droites, cercles, affixe d'un point, d'un vecteur, interprétation du module, de l'argument, de la conjugaison.
- Équations polynomiales de degré 2 : équations à coefficients réels, équations à coefficients complexes.
- Polynômes sur R ou C. La construction est hors programme. Somme, produit, degré, valuation, polynômes unitaires. Divisibilité, division euclidienne, pgcd, factorisation en produit de polynômes irréductibles. Fonctions polynomiales. Racines, dérivation, racines multiples, théorème de d'Alembert-Gauss (admis).
- Fractions rationnelles. Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle. Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités. Décomposition en éléments simples.

Algèbre 2 – 6 ECTS [24h CM, 36h TD]

- **Calcul matriciel** : opérations, inverse, opérations élémentaires. Calcul de l'inverse. Déterminant des matrices 2x2. Interprétation matricielle d'un système linéaire. Pivot de Gauss.

- **Espaces vectoriels** : définition d'un corps commutatif (on se limitera aux espaces vectoriels sur Q, R et C dans ce cours). Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels. Familles libres, génératrices, bases (on se limitera à des familles finies). Somme, somme directe, sous-espaces supplémentaires. Espaces vectoriels de dimension finie. Exemples d'espaces vectoriels : description de tous les sous-espaces vectoriels de R^2 et R^3, R^n, espaces de fonctions, de suites (suites récurrentes linéaires d'ordre deux), de matrices, K_n[X]. Théorème de la base incomplète.
- **Applications linéaires** : définition, matrice d'une application linéaire, noyau, image, caractérisation de l'injectivité. Image d'une famille libre/génératrice/base, rang, théorème du rang. Retour sur les matrices : rang/noyau d'une matrice, matrices équivalentes, toute matrice est équivalente à une matrice diag(1,...,1,0...0), transposition, rg(A) = rg(tA), trace, changement de base, matrices semblables. Endomorphismes, exemples : projections, symétries, rotations dans le plan, contre-exemple des translations.
- Applications en TD aux droites, cercles, plans, sphères et leurs intersections. Pivot de Gauss sur de petits systèmes en liaison avec la géométrie.
- Similitudes directes (en particulier translations, homothéties, rotations), critère de cocyclicité.
- **?A supprimer? Géométrie cartésienne** : Calcul vectoriel en coordonnées dans la base canonique de R^2 et R^3. Équation des droites et des coniques du plan en forme canonique (cercle, ellipse, parabole, hyperbole). Transformations du plan (translations, applications linéaires comme rotations, réflexions, homothéties), similitudes directes et inverses. Interprétation complexe. Équations des plans, des droites et des sphères, cylindres et cônes en forme canonique dans l'espace.

Analyse 1 – 6 ECTS [24h CM, 36h TD]

- **Les réels** : inégalités, valeur absolue, inégalité triangulaire, intervalles, parties majorées, minorées, bornées, majorant, minorant, maximum, minimum. Sup et inf : il s'agit d'introduire ces concepts mais leur maîtrise n'est pas un attendu de cette UE.
- **Fonctions de R dans R,** graphe de fonction, fonction associée à un graphe (domaine, codomaine), opérations sur les graphes : translations et dilatations horizontales et verticales, réflexions par rapport aux axes, restriction, co-restriction, prolongement. Symétries : parité, périodicité. Fonctions majorées/minorées. Sens de variation, fonctions monotones.
- Composée de deux fonctions, compatibilité des domaine/image, domaine de la fonction composée. Fonction bijective : une fonction est bijective si son graphe coupe toute droite horizontale en exactement un point.
- Image directe, image réciproque, injectivité, surjectivité, bijectivité, bijection réciproque, opérations (somme, produit, composition). On mettra l'accent sur le lien entre les propriétés des fonctions et de leurs graphes.
- **Limite d'une fonction en un point,** continuité, dérivabilité (dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une fonction composée), lien monotonie/signe de la dérivée, théorème des valeurs intermédiaires. On pourra dans un premier temps définir formellement la limite d'une fonction sans démontrer les propriétés relatives aux limites, à la continuité et à la dérivabilité.
- **Fonctions usuelles** : log, exp, x^alpha, cos, sin, tan, ch, sh, th + arcsin, arccos, arctan.
- Inéquations, en particuliers inéquations de degré 2.
- **Suites réelles** : définition, monotonie, suites minorées, majorées, bornées. Définition de la limite, convergence, opérations sur les limites, théorème d'encadrement, suites croissantes et majorées/décroissantes minorées (admis). Suites adjacentes. Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques. Suite extraites et théorème de Bolzano-Weierstrass (admis, la maîtrise des suites extraites et du théorème de Bolzano-Weierstrass n'est pas attendue). Suites de Cauchy, critère de Cauchy.
- **Limites de fonction**. Limites à droite, limites à gauche, unicité de la limite, opérations sur les limites, caractérisation séquentielle de la limite, passage à la limite dans des inégalités, existence d'une limite par encadrements.
- Équivalents, petits o, grands O. Croissance comparée. (Pour info :)Croissance comparée de base en

l'infini (cas O(log(n)) < O(n^k) < O(k^n), f(n) + g(n) = O(f(n)) si g est négligeable devant f).

- Continuité en un point. Continuité à gauche, à droite. Caractérisation séquentielle de la continuité en un point. Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.
- Continuité sur un intervalle. Théorème des valeurs intermédiaires. Algorithme de dichotomie. (Preuves facultatives en Info :) Image d'un intervalle par une fonction continue. Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone. Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Image d'un segment par une fonction continue. Une fonction continue sur un intervalle, à valeurs réelles et injectives, est strictement monotone. Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.
- **Interpolation et visualisation** (pour Info, avec TP) : Introduction à un logiciel de calcul numérique (Python+ SciPy / Numpy / Matplotlib). Visualisations de fonctions en 2D. Illustration de l'algorithme de dichotomie. Illustration d'interpolations : Interpolations polynomiales (polynômes de Lagrange et forme de Newton), Interpolation linéaire par morceaux.

Analyse 2 - 6 ECTS [24h CM, 30h TD, 6h de TP]

- **Représentation binaire des réels** (pour Info, avec TP) : Nombres dyadiques, développement binaire. Relation à la représentation des nombres entiers en binaire et décimal.
- Nombres réels : nombres rationnels et irrationnels, densité de Q dans R, partie entière, nombres décimaux, approximation d'un réel par un décimal, développement décimal d'un rationnel. La construction de R est hors programme.
- **Dérivabilité,** dérivabilité à gauche, à droite, interprétation géométrique, opérations. Dérivabilité implique continuité. Caractérisation de la dérivabilité en un point par les DL d'ordre 1. Calcul de valeurs approchées à l'aide d'un DL d'ordre 1, majoration de l'erreur.
- Extremum local et point critique.
- Egalité et inégalité des accroissements finis.
- Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.
- **Suites récurrentes**, ordre de convergence en liaison avec le théorème des accroissements finis. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2. Suites extraites.
- Fonctions de classe C^k. Opérations.
- Développements limités et Formule de Taylor-Young. On limitera la pratique aux petits ordres et aux calculs simples. Développements asymptotiques, interprétation/utilisation des DL à l'ordre 2, extrema, ordre de convergence, étude asymptotique des fonctions et des suites, etc.
- Convexité. Définition, propriété du graphe, caractérisation à l'aide des dérivées. Applications : inégalités de convexité et extrema.
- Formule de Taylor-Lagrange.
- Méthode de Newton pour la résolution de f(x)=0 pour une fonction f de R dans R. Ordre de convergence en liaison avec Taylor-Lagrange d'ordre 2.
- **Applications à l'Interpolation** (pour Info, avec TP) : Splines cubiques. Erreurs d'interpolation (sans preuve). On illustrera en TP sans détailler les algorithmes de résolution de systèmes linéaires.
- **Intégrale de Riemann** : définition succincte de l'intégrale de Riemann, preuves omises, l'étude détaillée de l'intégrale de Riemann et les preuves seront faites en Analyse 3. Théorème fondamental du calcul intégral (admis). Primitives. Intégration par parties, changement de variables. Primitives de fractions rationnelles. Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n pour les fonctions C^{n+1}.
- Équations différentielles linéaires du 1er ordre, Principe de linéarité. Méthode de variation de la constante. Problème de Cauchy bien posé.
- Équations différentielles linéaires du 2^{nd} ordre à coefficients constants. On se limitera aux seconds membres simples.

Algèbre 3 – 6 ECTS [24h CM, 36h TD]

- Permutations. Signature. On en profitera pour introduire les notions de groupe et de morphisme de groupes. Il s'agit d'habituer progressivement les étudiants à ces notions et au langage de la théorie des groupes. La maîtrise de la notion de groupes n'est pas un attendu de cette UE.
- Déterminants d'une matrice à coefficients dans R ou C. Définition, propriétés caractéristiques du déterminant : multilinéarité, caractère alterné, det(AB) = det(A) det(B), det(A) = 0 ssi A est non inversible, det(tA) = det(A). Déterminant par blocs. Développement par rapport à une ligne/colonne. Déterminant et géométrie : interprétation en termes d'aire et de volume dans R^2 et dans R^3.
- Réduction. Valeurs propres, vecteurs propres, polynômes caractéristiques. Liberté d'une famille infinie de vecteurs. Sous-espaces propres, sous-espaces caractéristiques. Diagonalisation, trigonalisation. Polynômes d'endomorphisme, polynôme minimal, théorème de Cayley-Hamilton.
- Décomposition de Dunford. Puissances d'une matrice, exponentielle de matrices.

Algèbre 4 - 6 ECTS [24h CM, 36h TD, MAT+L205]

- Produit scalaire. Espace préhilbertien, espace euclidien. Norme associée à un produit scalaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Orthogonalité. Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie. Familles orthogonales, familles orthonormales. Orthonormalisation de Gram-Schmidt. Bases orthonormales : existence dans un espace euclidien, expression d'une produit scalaire et de la norme.
- Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Supplémentaire orthogonal. Projection orthogonale : expression dans une base orthonormale. Distance d'un vecteur à un sous-espace.
- Isométries vectorielles d'un espace euclidien. Définition, image d'une base orthonormale. Symétries orthogonales, réflexion, O(E) et sa structure de groupe. Matrices orthogonales, On(R), SOn(R) et leur structure de groupe. Angles orientés. Produit mixte et vectoriel dans un espace euclidien orienté de dimension 3. Classification des isométries en dimension 2 et 3.
- Adjoints. Endomorphismes symétriques, normaux.
- Réduction des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien.
- Réduction des endomorphismes normaux d'un espace euclidien.
- Sous-espaces affines, hyperplans affines, vecteur normal à un hyperplan affine. Exemples dans R^2 et R^3.

Analyse 3 - 6 ECTS [24h CM, 33h TD, 3h TP]

- **Nombres réels : sup, inf.** Relations d'ordre. Retour sur la preuve de la convergence des suites monotones minorées/majorées. Suites extraites, preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass, preuve du théorème de Weierstrass. Continuité uniforme.
- Intégrale de Riemann : fonctions en escaliers. Fonctions continues par morceaux. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Sommes de Riemann : si f : [a, b] → R est continue par morceaux alors la somme de Riemann (b-a)/n∑_{k=0}^nf(a+k(b-a)/n) tend vers l'intégrale de f sur [a,b]. Preuve dans le cas où f est C1. Théorème fondamental du calcul intégral (preuve).
- Méthode des rectangles, des trapèzes. Polynômes d'interpolation de Lagrange et construction de formules de quadrature.
- Intégrales généralisées pour les fonctions f : I → R continues par morceaux sur un intervalle I de R. Convergence. Linéarité, positivité, relation de Chasles. Cas des fonctions à valeurs positives. Intégrales de Riemann et de Bertrand. Théorèmes de comparaison. Convergence absolue. Exemple d'intégrale semi-convergente. Changements de variables. Intégration par parties. Abel hors programme.
- Séries numériques. Convergence. Linéarité, positivité. Séries à termes positifs. Théorèmes de comparaison. Critères de Cauchy et de d'Alembert.
- Comparaison série/intégrales. Séries de Riemann et de Bertrand. Convergence absolue. Absolue convergence implique convergence. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes. Séries semi-convergentes. Séries alternées. Le critère d'Abel est hors programme.

Analyse 4 – 6 ECTS [24h CM, 36h TD]

- Normes sur R^n, normes usuelles, boules.
- Éléments de topologie de R^n muni de sa norme euclidienne. Distance euclidienne, boules, ouverts, fermés, voisinages, point intérieur, point adhérent. Compacts. Critères séquentiels. Il ne s'agit pas de faire un cours de topologie des espaces vectoriels normés.
- Continuité des fonctions de R^n dans R^p. Théorème des bornes atteintes.
- Calcul différentiel pour les fonctions de R^n dans R^p. Application différentiable, différentielle, dérivées partielles, matrice jacobienne, différentielle d'une combinaison linéaire, d'une composée et de B(f,g) où B est une application bilinéaire, dérivées partielles d'une composée (règle de la chaîne). Cas des applications numériques : gradient. Applications de classe C^1, L'application *f* est de classe C^1 sur un ouvert Ω si et seulement si les dérivées partielles existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω.
- Fonctions de classe C^k. Une application est dite de classe C^k sur un ouvert Ω si ses dérivées partielles d'ordre *k* existent et sont continues sur Ω. Opérations algébriques sur les applications de classe C^*k* . Composition d'applications de classe C^*k* .
- Fonctions de classe C^2 de R^n dans R. Théorème de Schwarz. Matrice Hessienne. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2.
- Extrema. Points critiques. Conditions nécessaires et suffisantes d'ordre 1 et 2.
- Arcs paramétrés C1. Vecteurs tangents et normaux. Exemples simples dans le plan.

Compléments de mathématiques - 6 ECTS - [24h CM, 36h TD, MAT+L209]- optionnel

- Suites complexes : convergence, suites géométriques.
- Suites de fonctions. Convergence simple, convergence uniforme, norme de la convergence uniforme. Propriétés de la limite uniforme d'une suite de fonctions : théorèmes de continuité et de dérivabilité. Passage à la limite sous l'intégrale : théorème de convergence dominée (admis).
- Séries de fonctions. Convergence simple, uniforme et normale. Propriété d'une série de fonctions convergeant uniformément : théorèmes de continuité et de dérivabilité. Intégration terme à terme (admis).
- Séries entières. Définition, domaine de convergence, lemme d'Abel, rayon de convergence, méthodes classiques de calcul du rayon de convergence, produit de Cauchy, continuité. Cas des fonctions réelles de la variable réelle : dérivation, intégration, développement en série entière.
- Calcul différentiel : C1 difféomorphismes, théorème d'inversion globale (admis), exemples des coordonnées polaires, cylindriques, sphériques.
- Calcul intégral : calculs d'intégrales doubles et triples. Changements de variables. Coordonnées polaires et cylindriques. Intégrales à paramètre.

Probabilités discrètes et statistique descriptive - 6 ECTS - [24h CM, 30h TD, 6h TP] - Optionnel (MAT2072L)

- Ensemble. Opérations, cardinaux des ensembles finis (coefficients binomiaux, arrangements, permutations), dénombrabilité (on traitera les exemples de Q et R).
- Familles sommables à termes réels. Sommation par paquets. On mettra l'accent sur les exemples.
- Modèle probabiliste sur un ensemble dénombrable. Indépendance, probabilités conditionnelles, formule des probabilités totales, formule de Bayes. Variables aléatoires discrètes, loi, espérance, variance, fonction de répartition. Lois discrètes usuelles. Séries génératrices et applications. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev, loi faible des grands nombres. Densité de la loi gaussienne et théorème de Moivre-Laplace.

- Couples de variables aléatoires discrètes. ou variables à densité, dans ce cas changer le nom de l'UE ??
- Statistiques descriptives. Résumé numérique, représentations graphiques (diagramme en bâtons, histogramme, boxplot, diagramme cumulatif).
- Intervalles de confiance.

FIN