Université Claude Bernard Lyon 1 UE Analyse 1 pour les mathématiciens
Semestre d'automne 2023-2024

Epreuve Commune Anonyme – Durée 120 min – Le vendredi 22 décembre 2023

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
L'énoncé est constitué de deux pages et comporte quatre exercices.

Exercice 1. Soit f la fonction définie par

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{x}{1+|x|}. \end{array}$$

1. Justifier que f est bien définie et continue.
2. Etudier la parité de f.
3. Calculer la dérivée de f sur $]0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$.
4. Rappeler la définition de $f'(0)$ et en déduire que $f'(0)=1$.
5. Calculer les limites de f en $\pm\infty$. Et dresser le tableau de variation de f.
6. Déterminer l'image I de f.
7. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans I. On note $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sa fonction réciproque.
8. Soit $t \in I$. Donner une formule pour $h(t)$, en distinguant les cas $t \geq 0$ et $t \leq 0$.
9. Donner une formule pour $h(t)$ valable pour tout $t \in I$.

Exercice 2. On rappelle que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
2. Montrer que $(v_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite. Notons ℓ cette limite.
4. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a
$$u_n < \ell < v_n.$$
5. On veut montrer que ℓ n'est pas rationnel. Montrer que si ℓ est rationnel, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ avec $q \geq 2$ tels que $\ell = \frac{p}{q}$.
6. Obtenir une contradiction en écrivant l'encadrement de la question 4 pour $n = q$, puis en le multipliant par $q!$.

Tournez SVP

Exercice 3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{3 - u_n}.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_n < -1$.
3. Montrer que la suite $(v_n = u_{n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
5. Déterminer sa limite.

Exercice 4. Soient les fonctions

$$\begin{array}{rccl} f: & [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} - x, \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} g: & [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & xe^{x} - e^{x} + 1. \end{array}$$

1. Montrer que la fonction $g : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto xe^x - e^x + 1$ est croissante.
2. En déduire que
$$\forall x > 0 \qquad e^x - 1 \leq xe^x.$$
3. Justifier que f est dérivable et calculer sa dérivée.
4. En exprimant $f'(x)$ en fonction de $t = e^{\frac{x}{2}}$, montrer que f est croissante.
5. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et dresser le tableau de variation de f.
6. En déduire que
$$\forall x > 0 \qquad f(x) > 0.$$
7. En déduire que
$$\forall x > 0 \qquad e^x - 1 \geq xe^{\frac{x}{2}}.$$
8. Soit $x > 0$ fixé. A l'aide de la fonction $h : [0;x] \longrightarrow \mathbb{R}, y \longmapsto xe^y$, montrer que
$$\exists c \in]\frac{x}{2}; x[\qquad e^x - 1 = xe^c.$$
9. Justifier que c est unique.