Université Claude Bernard Lyon 1 UE Analyse 1 pour les mathématiciens
Semestre d'automne 2023-2024

Epreuve Commune Anonyme – Durée 120 min – Le vendredi 22 décembre 2023

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
L'énoncé est constitué de deux pages et comporte quatre exercices.

Exercice 1. Soit f la fonction définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{1+|x|}. \end{array}$$

1. Justifier que f est bien définie et continue.
   Puisque, pour tout x réel, $|x| \geq 0$, le dénominateur ne s'annule pas. Donc f est bien définie. De plus, f est obtenue à partir de la valeur absolue, la fonction $x \mapsto x$ et la constante 1 par une somme et un quotient : elle est continue.
2. Etudier la parité de f.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -x/(1+|x|) = -f(x)$. Donc f est impaire.
3. Calculer la dérivée de f sur $]0; +\infty[$ et sur $]-\infty; 0[$.
   Pour $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = x/(1+x)$. Donc $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$.
   Pour $x \in]-\infty; 0[$, $f(x) = x/(1-x)$. Donc $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.
   Dans les deux cas, $f'(x) = \frac{1}{(1+|x|)^2}$.
4. Rappeler la définition de $f'(0)$ et en déduire que $f'(0) = 1$.
   $f'(0)$ est la limite (si elle existe) du taux d'accroissement $(f(h) - f(0))/h$ lorsque $h \to 0$. Ici $(f(h) - f(0))/h = 1/(1+|h|)$ tend vers 1. Donc $f'(0) = 1$.
5. Calculer les limites de f en $\pm\infty$. Et dresser le tableau de variation de f.
   Pour $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = x/(1+x) = 1/(1/x+1)$. Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
   Puisque f est impaire, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$.
   Les questions précédentes impliquent que f' est positive. Donc f est croissante.
6. Déterminer l'image I de f.
   Par le théorème des valeurs intermédiaires et le tableau de variation, on a $I =]-1; 1[$.
7. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans I.
   Comme f est strictement croissante elle est injective. Elle est de plus surjective sur son image. D'où la bijectivité.
   On note $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sa fonction réciproque.
8. Soit $t \in I$. Donner une formule pour $h(t)$, en distinguant les cas $t \geq 0$ et $t \leq 0$.
   Il s'agit pour $t \in]-1; 1[$ fixé de résoudre l'équation
   $$f(x) = t$$
   d'inconnue x.
   Soit $t \in]-1, 1[$.
   Pour $t \geq 0$, on voit sur le tableau de variation que $x \geq 0$. Mais alors l'équation devient
   $$\frac{x}{1+x} = t$$
   donc $x = t(1+x) = t + tx$ donc $x = t/(1-t)$.
   Pour $t \leq 0$, on voit sur le tableau de variation que $x \leq 0$. Mais alors l'équation devient
   $$\frac{x}{1-x} = t$$
   donc $x = t(1-x) = t - tx$ donc $x = t/(1+t)$.
   Finalement
   $$h : \begin{array}{ccc}]-1; 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \frac{t}{1-t} & si\ t \geq 0 \\ \frac{t}{1+t} & si\ t \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

9. Donner une formule pour $h(t)$ valable pour tout $t \in I$.
On a pour tout $t \in I$, $h(t) = \frac{t}{1-|t|}$.

Exercice 2. On rappelle que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
2. Montrer que $(v_n)_{n\in n\geq 2}$ est strictement décroissante.
Pour tout $n \geq 2$, on a $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!}(2-(n+1)) < 0$. Donc $(v_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite. Notons ℓ cette limite.
On constate que $v_n - u_n = \frac{1}{n!}$ tend vers 0.
De plus, avec les deux questions précédentes, $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante, et $(v_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.
On peut alors appliquer le théorème des suites adjacentes qui donne la conclusion.
4. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a
$$u_n < \ell < v_n.$$
Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et tend vers ℓ, on a $u_n < \ell$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme (v_n) est strictement décroissante pour $n \geq 2$ et tend vers ℓ, on a $v_n > \ell$, pour tout $n \geq 2$.
5. On veut montrer que ℓ n'est pas rationnel. Montrer que si ℓ est rationnel, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ avec $q \geq 2$ tels que $\ell = \frac{p}{q}$.
Par définition des rationnels, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\ell = p/q$. Or $\ell > u_2 = 2$ et $\ell < v_2 = 3$. Donc $p \in \mathbb{N}$ et $q \geq 2$.
6. Obtenir une contradiction en écrivant l'encadrement de la question 4 pour $n = q$, puis en le multipliant par $q!$.
Comme $q \geq 2$, on a
$$u_q < \ell < v_q.$$
Et donc
$$u_q < \frac{p}{q} < v_q,$$
puis, en multipliant par $q!$
$$q!\ u_q < p\ (q-1)! < q!\ v_q.$$
On remarque que $q!\ v_q = q!\ u_q + 1$. Donc les deux membres extrêmes de ces inégalités sont deux entiers consécutifs. Or $p\ (q-1)!$ est aussi un entier. Contradiction.

Exercice 3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{3 - u_n}.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
On a $u_1 = \frac{3u_0-1}{3-u_0} = 5$. Et $u_2 = \frac{3u_1-1}{3-u_1} = \frac{14}{-2} = -7$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_n < -1$.
On fait une récurrence : pour tout $n \geq 2$, on note H_n la propriété « $u_n < -1$ ».
Initialisation : Pour $n = 2$, on a bien $u_2 = -7 < -1$, donc H_2 est vraie.
Hérédité. Soit $n \geq 2$. Supposons H_n vraie. On a donc $u_n < -1$.
Alors $3u_n - 1 < 3 \times (-1) - 1 = -4$ et $3 - u_n > 3 - (-1) = 4 > 0$.
Donc $u_{n+1} = \frac{3u_n-1}{3-u_n} < \frac{-4}{4} = -1$.
Par principe de récurrence, la propriété $u_n < -1$ est donc vraie pour tout $n \geq 2$.
3. Montrer que la suite $(v_n = u_{n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On regarde
$$v_{n+1} - v_n = \frac{3v_n - 1}{3 - v_n} - v_n = \frac{3v_n - 1 - v_n(3 - v_n)}{3 - v_n} = \frac{v_n^2 - 1}{3 - v_n}.$$
Or $v_n = u_{n+2} < -1$, donc $3 - v_n > 3 + 1 > 0$ et $v_n^2 - 1 > 0$.
Donc $v_{n+1} - v_n < 0$. Ainsi v_n est décroissante.

4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   On vient de montrer que v_n est croissante et majorée. Donc elle converge. Donc u_n converge aussi.

5. Déterminer sa limite.

   Notons ℓ la limite. On part de $u_{n+1} = \frac{3u_n-1}{3-u_n}$ et on fait tendre n vers l'infini des deux côtés. Par opération et unicité de la limite, on obtient

$$\ell = \frac{3\ell - 1}{3-\ell}.$$

   Donc $\ell(3-\ell) = 3\ell - 1$ et $0 = \ell^2 - 1 = (\ell-1)(\ell+1)$. Donc $\ell = \pm 1$. Or, pour tout $n \geq 2$, $u_n < -1$ donc $\ell \leq -1$. Finalement, $\ell = -1$.

Exercice 4. Soient les fonctions

$$\begin{array}{rccl} f: & [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} - x, \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} g: & [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & xe^x - e^x + 1. \end{array}$$

1. Montrer que la fonction $g : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto xe^x - e^x + 1$ est croissante.

   Par opération g est dérivable. De plus, pour tout $x \geq 0$, on a $g'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x \geq 0$. Donc g est croissante.

2. En déduire que

$$\forall x > 0 \qquad e^x - 1 \leq xe^x.$$

   En fait $g'(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$. Donc g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Donc pour tout $x > 0$, $g(x) > g(0) = 0$.

3. Justifier que f est dérivable et calculer sa dérivée.

   f est dérivable par opérations. De plus, $f'(x) = \frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{2} - 1 = \mathrm{ch}(\frac{x}{2}) - 1$.

4. En exprimant $f'(x)$ en fonction de $t = e^{\frac{x}{2}}$, montrer que f est croissante.

   On a, pour tout $x \geq 0$, $t > 0$ et

$$f'(x) = \frac{t + t^{-1} - 2}{2} = \frac{t^2 + 1 - 2t}{2t} = \frac{(t-1)^2}{2t} > 0.$$

   Alors f est strictement croissante.

5. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et dresser le tableau de variation de f.

   Par croissance comparée, $f(x) = x(\frac{e^{x/2}}{x} - 1) - e^{-x/2}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\mathrm{sgn}(f'(x))$	$+$
f	$0 \nearrow +\infty$

6. En déduire que

$$\forall x > 0 \qquad f(x) > 0.$$

   Comme $f(0) = 0$, l'inégalité provient de la stricte monotonie de f.

7. En déduire que

$$\forall x > 0 \qquad e^x - 1 \geq xe^{\frac{x}{2}}.$$

   Partons de, pour tout $x > 0$, $e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} - x > 0$. On multiplie par $e^{x/2}$ qui est strictement positif et obtient

$$e^x - 1 > xe^{x/2},$$

   qui est l'inégalité demandée.

8. Soit $x > 0$ fixé. A l'aide de la fonction $h : [0; x] \longrightarrow \mathbb{R}, y \longmapsto xe^y$, montrer que

$$\exists c \in]\frac{x}{2}; x[\qquad e^x - 1 = xe^c.$$

La fonction h est continue. De plus, $h(x/2) < e^x - 1$ et $h(x) > e^x - 1$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]\frac{x}{2}; x[$ tel que $e^x - 1 = h(c)$.

9. Justifier que c est unique.
L'unicité provient de la stricte croissance de h. En effet, $h'(y) = xe^y > 0$.