Chapitre 1

Nombres réels

Sommaire

1 Les nombres rationnels

$\mathbb{Z}$ désigne l'ensembles des entiers relatifs. Une *écriture* d'un nombre rationnel est une fraction de la forme

$$\frac{a}{b}$$

avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Exemples : $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{-1}{2}$, $\frac{3}{-3}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{-12}{21}$... La difficulté est que deux écritures différentes peuvent représenter le même nombre rationnel. Ainsi on décrète que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \in \mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

On vient de définir l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Enfin, pour $a \in \mathbb{Z}$, on pose $a = \frac{a}{1}$ et on obtient $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Soit $q = \frac{a}{b}$ un nombre rationnel avec $b > 0$. Pour situer q sur l'axe des abscisses, on procède ainsi

(i) On découpe le segment en $[0; 1]$ en b parts égales. On obtient ainsi $\frac{1}{b}$.

(ii) On reparte a fois cette quantité. (Avec la convention usuelle si a est négatif).

Enfin on a plusieurs opérations sur $\mathbb{Q}$. Un produit

$$\frac{a}{b} . \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd},$$

une addition

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + cb}{bd},$$

un ordre

$$\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \leqslant cb,$$

où b et d sont positifs.

2 Nombres réels

2.1 Définition

Pour les grecs de l'antiquité, (VI$^{\text{eme}}$ siècle av. J.C.), les seuls nombres étaient les nombres rationnels. Bien qu'ils aient su que $\sqrt{2}$ n'était pas rationnel, et que cette grandeur est la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1, cette grandeur était qualifiée d'incommensurable, montrant bien leur embarras. Il a fallu attendre la fin du XIX^{e} siècle pour que des mathématiciens comme Peano, Dedekind et Cantor notamment aboutissent par une démarche rigoureuse à la première construction du corps des nombres réels. Dans ce cours nous donnons une définition précise de $\mathbb{R}$, mais admettrons l'existence des opérations et leurs propriétés.

Définition I.1: Nombres réels

Un *nombre réel* est une écriture décimale composée de

(i) Une signe $\pm$;

(ii) Une suite finie de chiffres dans $\{0, \cdots, 9\}$ ne commençant pas par 0 ou étant réduite à 0 ;

(iii) Une virgule ;

(iv) Une suite infinies de chiffres (éléments de $\{0, \cdots, 9\}$) après la virgule ne finissant pas par une infinité de 9 successifs.

Le nombre $-0, 0 \dots 0 \dots$ n'existe pas ou est égal à $+0, 0 \dots 0 \dots$. L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Remarques. (i) Les éléments de $\mathbb{R}$ se présentent donc ainsi

$$\pm a_p \dots a_0, b_1 \dots b_n \dots$$

avec les $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ et $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ éléments de $\{0, \cdots, 9\}$.

(ii) Cette définition n'empêche pas les écritures simplifiées usuelles : $2 = +2,000\dots$ par exemple.

(iii) $0,9\dots9\dots$ est interdit pour la raison suivante. Soit $x < y$ deux nombres réels. On veut que

$$x < \frac{x+y}{2} < y.$$

Avec $x = 0,9\dots9\dots$ et $y = 1$, on a un problème ! E effet, il n'existe pas de z tel que $x < z < y$. On résout ce problème en interdisant $0,9\dots9\dots$. D'autres auteurs autorisent cette écriture mais imposent $0,9\dots9\dots = 1$.

(iv) Comme tout nombre rationnel a une écriture décimale, l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels peut être vu comme une partie de $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

On note $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels avec un signe $+$ et on pose $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ - \{0\}$ et $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.

2.2 Interprétation

Un nombre réel peut être pensé comme une suite de nombres rationnels (et même décimaux) qui converge vers, justement, le nombre réel. En effet, soit x un nombre réel. On note x_n le nombre décimal obtenu en ne gardant que les n premiers chiffres après la virgule. Alors x_n est une approximation de x d'autant plus précise que n est grand.

2.3 Opérations

On admettra le résultat suivant pas si facile qu'il n'y parait.

Théorème I.2

Il existe deux lois $+$ et $\times$ et une relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ telles que :

(i) $+, \times$ et $\leqslant$ prolongent les lois et relations usuelles sur $\mathbb{Q}$.

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad x + y = y + x$

(iii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \qquad (x+y)+z = x+(y+z)$

(iv) $\forall x \in \mathbb{R} \qquad x + 0 = x$

(v) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists! y \in \mathbb{R} \qquad x + y = 0$; on pose $-x := y$

(vi) $\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad x.y = y.x$

(vii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \qquad (x.y).z = x.(y.z)$

(viii) $\forall x \in \mathbb{R} \qquad x.1 = x$

(ix) $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \exists! y \in \mathbb{R} \qquad x.y = 1$; on pose $x^{-1} := y$

(x) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \qquad z.(x+y) = z.x + z.y$

(xi) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \qquad (x \leqslant y$ et $y \leqslant z) \implies x \leqslant z$

(xii) $\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$

(xiii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \qquad x \leqslant y \implies z + x \leqslant z + y$

(xiv) $\forall x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+ \qquad x \leqslant y \implies a.x \leqslant a.y$

(xv) $\forall x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^* \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad x \leqslant N.y$

Remarque. Par convention . est prioritaire sur $+$. Cette convention usuelle permet par exemple d'écrire $z.x + z.y$ plutôt que $(z.x) + (z.y)$. On utilisera les conventions usuelles $x/y = x.y^{-1}$, $x - y = x + (-y)\dots$

2.4 Intervalles de $\mathbb{R}$

Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ de la forme $[a;b]$, $]a;b[$, $[a;b[$ ou $]a;b]$, avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Les quantités a et b sont appelées les bornes de l'intervalle. On dit que I est *d'interieur non vide* si $a \neq b$. *L'interieur* de l'intervalle I est $]a;b[$.

2.5 Propriété de la borne supérieure

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$. Une nombre réel a est appelé *majorant de A* si

$$\forall x \in A \qquad x \leqslant a.$$

Un majorant est donc un nombre (non nécessairement dans A plus grand que tous les éléments de A. La partie A est dite *majorée* s'il existe un majorant.
Encore un résultat admis :

Théorème I.3. Existence borne supérieure

Toute partie A non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure, c'est-à-dire un plus petit majorant.

Ce théorème n'est pas vrai pour $\mathbb{Q}$: l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x^2 \leqslant 2\}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.
On note $\sup(A)$ la borne supérieure de A. Si A n'est pas majoré, on pose $\sup(A) = +\infty$. Par ailleurs, $\sup(\emptyset) = -\infty$.
Une caractérisation bien utile de la borne supérieure.

Théorème I.4: Caractérisation du sup

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Alors $M = \sup(A)$ si et seulement si

(i) M est un majorant de A :
$$\forall x \in A \qquad x \leqslant M$$

(ii) Et, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intersection $A \cap]M-\varepsilon; M]$ est non vide.

Remarque. La condition (ii) peut être remplacée par l'existence d'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers M.

Preuve

Soit M vérifiant les assertions (i) et (ii). Le réel M est un majorant. Il s'agit de montrer que c'est le plus petit. Prenons donc un autre majorant m et montrons que $M \leqslant m$. Par l'absurde supposons que $M > m$ et posons $\varepsilon = M - m$. Par hypothèse, il existe $a \in A \cap]M-\varepsilon; M]$. Mais alors $a > M - \varepsilon = m$. Ce qui contredit le fait que m soit un majorant.

Réciproquement, il est clair que $M = \sup(A)$ vérifie la première assertion. Montrons la seconde. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $M - \varepsilon < M$ n'est pas un majorant de A. Donc il existe $a \in A$ tel que $M - \varepsilon < a$. Comme $a \leqslant M$, on a $a \in]M-\varepsilon; M]$. En particulier, l'intersection $A \cap]M-\varepsilon; M]$ est non vide.

Exemple 1. Soit $A = \{-\frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}^*\}$. Alors $\sup(A) = 0$. Soit $B = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x^2 \leqslant 2\}$. Alors $\sup(B) = \sqrt{2}$.

3 Inégalités

Nous avons déjà rencontré la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$; on a aussi $\geqslant$, $<$ et $>$.
Voici une liste de propriétés utiles.

Propriété I.5. *Soit a, b, c, d des nombres réels.*

(i) *si $a \leqslant b$ alors $a + c \leqslant b + c$;*

(ii) *si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ alors $a + c \leqslant b + d$; (les 3 inégalités sont dans le même sens !)*

(iii) *si $a \leqslant b$ et $c > 0$ alors $ac \leqslant bc$;*

(iv) *si $a \leqslant b$ et $c < 0$ alors $ac \geqslant bc$;*

(v) *si $a \leqslant b$ et a et b* **ont le même signe** *alors $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$.*

Remarques. (i) Il y a des propriétés analogues pour $\geqslant$ et $<$. Pour ne pas encombrer vos mémoires, vous pouvez les retrouver facilement.

(ii) Attention à ne pas utiliser d'autres opérations de votre invention. Par exemple, les implications suivantes sont **fausses**

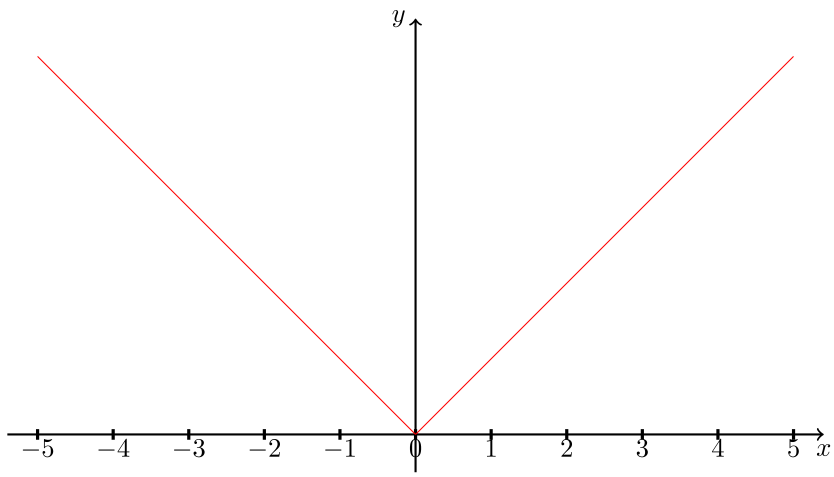
$$a \leqslant b \implies \frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$$
$$a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d \implies a - c \leqslant c - d$$

4 Valeur absolue

On définit la fonction

$$\begin{array}{rccl} |\cdot| : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Son graphe est



Propriété I.6. *Soit a et b deux nombres réels. Alors*

(i) $|ab| = |a|\,|b|$ *(en particulier $|-a| = |a|$) ;*

(ii) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ *avec égalité si et seulement si a et b ont le même signe.*

(iii) $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$.

Chapitre 2

Fonctions réelles de la variable réelle

Sommaire

1 Applications

1.1 Premiers exemples

Une *application* f est la donnée de deux ensembles E et F et d'une flèche $f : E \longrightarrow F$ qui associe à chaque élément x de E un élément noté $f(x)$ de F. Le *graphe de* f est la partie suivante de $E \times F$:

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) : x \in E\}.$$

Il est important de comprendre que E et F font parties de la donnée. Ainsi, sin n'est pas une application.

(i) Certaines applications sont données par une formule :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x+3 \end{array} \qquad f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{2}{x}+3 \end{array} \qquad f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & -2x+7 \end{array}$$

(ii) ou par plusieurs formules :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} 2x+5 \text{ si } x \leqslant 0 \\ 7x+5 \text{ si } x > 0 \end{array} \right. \end{array}$$

(iii) ou par une propriété caractéristique :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{l'unique entier } n \text{ tel que } n \leqslant x < n+1 \end{array}$$

(iv) ou par une liste exhaustive :

$$\begin{array}{c} \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\} \\ 1 \mapsto 2 \quad 2 \mapsto 2 \quad 3 \mapsto 1 \end{array}$$

(v) ou que sais-je encore…

Il est important de comprendre que pour tout $x \in E$ il y a un unique $f(x)$ dans F.
Dans ce cours E et F seront des parties de $\mathbb{R}$ et le plus souvent des intervalles ou des réunions finies d'intervalles. Dans ce cas, une application de E dans F est appelée une *fonctions réelles de la variable réelle*. Toujours dans ce cas, le graphe de f est une partie de $\mathbb{R}^2$.
Soit E une partie de $\mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition II.7

La fonction f est dîte *croissante* si

$$\forall x, y \in E \qquad x \geqslant y \;\Rightarrow\; f(x) \geqslant f(y).$$

La fonction f est dîte *décroissante* si

$$\forall x, y \in E \qquad x \geqslant y \;\Rightarrow\; f(x) \leqslant f(y).$$

1.2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition II.8: Injective, surjective, bijective

(i) Une application $f : E \longrightarrow F$ est *injective* si

$$\forall x, y \in E \qquad f(x) = f(y) \implies x = y.$$

(ii) Une application $f : E \longrightarrow F$ est *surjective* si

$$\forall y \in F \qquad \exists x \in E \quad f(x) = y.$$

(iii) Une application $f : E \longrightarrow F$ est *bijective* si elle est injective et surjective.

Exercice 1. *Illustrer l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité sur les « modèles » des patates, des étiquettes, des graphes.*

Exercice 2. *Traduire par une phrase avec $\forall$ and $\exists$ le fait d'être une bijection.*

Exercice 3. *Traduire l'injectivité et la surjectivité de $f : E \longrightarrow F$ en terme de l'existence et de l'unicité de solution aux équations, d'inconue x*

$$f(x) = y$$

pour y fixé dans F.

Exercice 4. *On suppose ici que E et F sont des intervalles de $\mathbb{R}$. Traduire l'injectivité et la surjectivité de $f : E \longrightarrow F$ en terme du graphe de f.*

Une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective si

$$\forall y \in F \quad \exists! x \in E \quad f(x) = y.$$

L'affirmation précédente permet d'associer un unique élément x à chaque élément y de E. Ainsi, on définit une application

$$f^{-1} : F \longrightarrow E,\, y \longmapsto x.$$

L'application f^{-1} ainsi définie est appelée réciproque de f et est caractérisée parmi les applications de F dans E par les deux propriétés suivantes

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F.$$

Exemple 2. Considérons $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+,\, x \longmapsto x^2$. Cette application est bijective et $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+,\, x \longmapsto \sqrt{x}$.

1.3 Composition

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On définit alors

$$\begin{array}{cccc} g \circ f : & E & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

L'application $g \circ f$ est appelé la composée de f et g.

Remarques. (i) Pour pouvoir définir $g \circ f$, il faut que l'ensemble d'arrivée de f soit égal à (ou inclus dans) l'ensemble de départ de g.

(ii) Dans la représentation graphique avec des patates, la flèche de f est à gauche de la flèche de g dans $g \circ f$. Cela correspond au fait que pour calculer $g \circ f(2)$ il faut d'abord calculer $f(2)$ puis g de la valeur obtenue.

Exercice 5. *(i) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x+2$ et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3x$. Calculer les 6 fonctions $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$, $h \circ f$, $g \circ h$ et $h \circ g$.*

(ii) On revient à la situation de la définition. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f l'est. Interpréter ce résultat sur le « modèle des patates ». La réciproque est-elle vraie ?

(iii) On revient à la situation de la définition. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g l'est. Interpréter ce résultat sur le « modèle des patates ». La réciproque est-elle vraie ?

1.4 Image directe, image réciproque

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Si $A \subset E$ est une partie de E, on appelle *image directe de A* la partie de F suivante :

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\}.$$

Si $B \subset F$ est une partie de F, on appelle *image réciproque* la partie de E suivante :

$$f^{-1}(B) := \{x \in E : f(x) \in B\}.$$

L'image réciproque jouie de propriétés agréables :

Proposition II.9

Soit A et B deux parties de F. Alors

(i) $f^{-1}(F - A) = E - f^{-1}(A)$;

(ii) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;

(iii) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

La preuve est laissée en exercice.

Attention. Ces trois propriétés ne sont pas toutes vraies pour l'image directe. Comme exercice, justifier cette dernière affirmation en montrant celles qui sont vraies et trouvant des contre-exemples pour les autres.

2 Transformations du graphe

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Certaines opérations sur les fonctions en terme de trransformation du graphe.

$-f(x)$	Symétrie axiale d'axe $(0x)$
$f(-x)$	Symétrie axiale d'axe $(0y)$
$f(x) + a$	Translation verticale de vecteur $a\overrightarrow{j}$.
$f(x + a)$	Translation verticale de vecteur $-a\overrightarrow{i}$.
$\lambda f(x)$	Affinité verticale de rapport λ.
$f(\lambda x)$	Affinité horizontale de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

Définition II.10

La fonction f est dîte *paire* si I est symétrique par rapport à 0 et si

$$\forall x \in I \qquad f(-x) = f(x).$$

La fonction f est dîte *impaire* si I est symétrique par rapport à 0 et si

$$\forall x \in I \qquad f(-x) = -f(x).$$

La fonction f est dîte *périodique de période T* si $I = \mathbb{R}$ et

$$\forall x \in I \qquad f(x+T) = f(x).$$

Exercice 6. *Interpréter ces 3 propriétés en terme de la géométrie du graphe de f.*

3 Dérivation

Soit I un intervalle ouveert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle sur I. La fonction f est dite *dérivable* si

$$\forall x \in I \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, la fonction

$$\begin{array}{rccc} f' : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \end{array}$$

est appelée la *dérivée* de f.
Voici quelques règles de calcul de la dérivée.

$(\lambda u + \mu v)' = \lambda u' + \mu v'$	$(uv)' = u'v + uv'$
$(\frac{1}{u})' = \frac{-u'}{u^2}$	$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$(u \circ v)' = v' \times u' \circ v$	

Et une propriété fondamentale :

Lorsque f est définie **sur un intervalle** et dérivable, on a l'équivalence
f est croissante (resp. décroissante) ssi $f' \geqslant 0$ (resp. $f' \leqslant 0$).

Chapitre 3

Fonctions usuelles

Sommaire

1 Polynômes

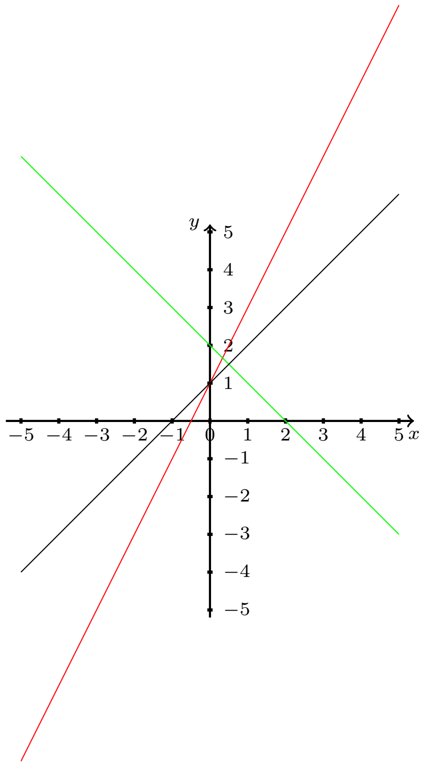
1.1 Fonctions affines

Une fonction affine est une fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax+b \end{array}$$

où a et b sont des constantes réelles données. Cette fonction est dérivable et sa dérivée est $f' = a$. On peut retrouver a et b à partir de f comme suit

$$b = f(0) \qquad a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \quad \forall x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}.$$



Exercice 7. *Reconnaitre sur le dessin ci-dessus les graphes de* $x \mapsto 2x+1$, $x \mapsto -x+2$ *et* $x \mapsto x+1$.

1.2 Polynômes de degré 2

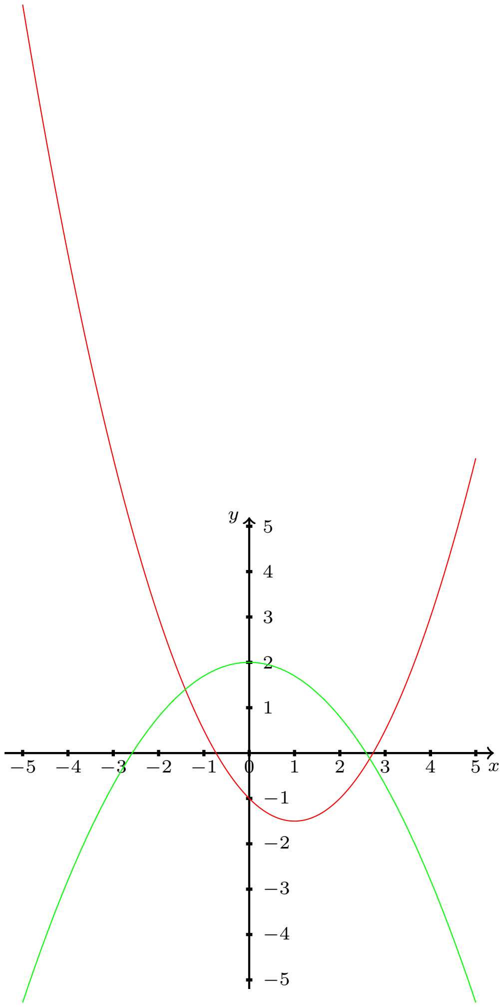
Une fonction polynomiale de degré 2 est une fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax^2+bx+c \end{array}$$

où a, b et c sont des constantes réelles données telles que $a \neq 0$. Cette fonction est dérivable et sa dérivée est $f'(x) = 2ax + b$. Les limites sont

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

La fonction a un minimum (resp. maximum) en $-b/2a$ si $a > 0$ (resp. $a < 0$).



Exercice 8. *Lire sur les graphes ci-dessus, le signe de a et les valeurs de $\frac{-b}{2a}$ et b/a.*

2 Partie Entière

Définition III.11: Partie Entière

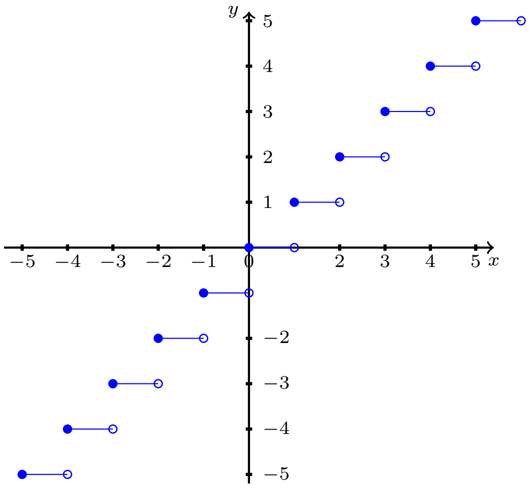
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif, noté $E(x)$ et appelé *partie entière de x*, tel que

$$E(x) \leqslant x < E(x) + 1.$$

Il s'avère que cette définition est pratique pour les démonstrations. Il convient de remarquer que $E(\pi) = 3$, $E(7) = 7$, $E(-2,28) = -3$ et $E(-4) = -4$.
On obtient ainsi la fonction partie entière

$$\begin{array}{rccl} E: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & x & \longmapsto & E(x) \end{array}$$

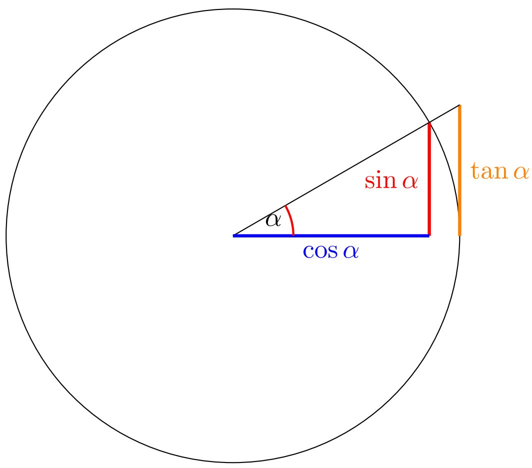
La fonction E, dérivable sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ (de dérivée nulle) et non continue en tout point de $\mathbb{Z}$.



3 Fonctions trigonométriques

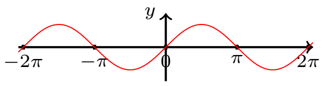
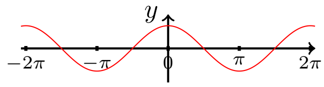
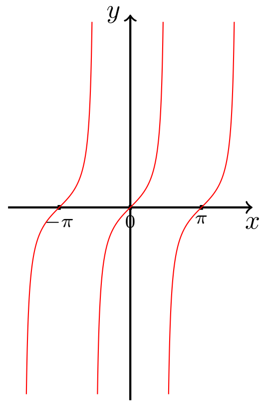
3.1 Directes

Les fonctions trigonométriques sont définies par le dessin suivant. Le cercle trigonométrique :

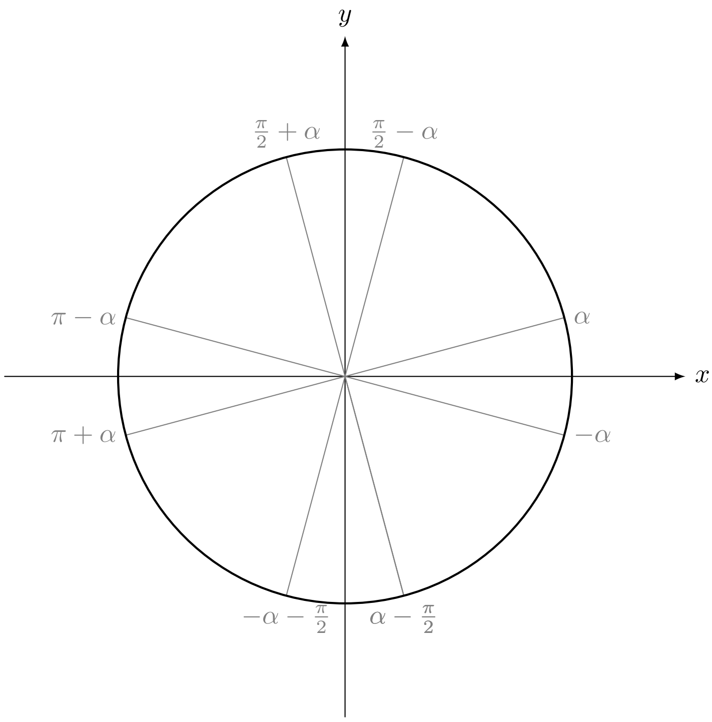


Pour que ce dessin fasse vraiment une définition, il faut pouvoir associer un point du cercle à un nombre réel α. C'est la notion de mesure d'angle qui fait ce travail. Vous verrez dans le cours l'Algèbre I que l'exponentielle complexe peut aussi faire ce travail.

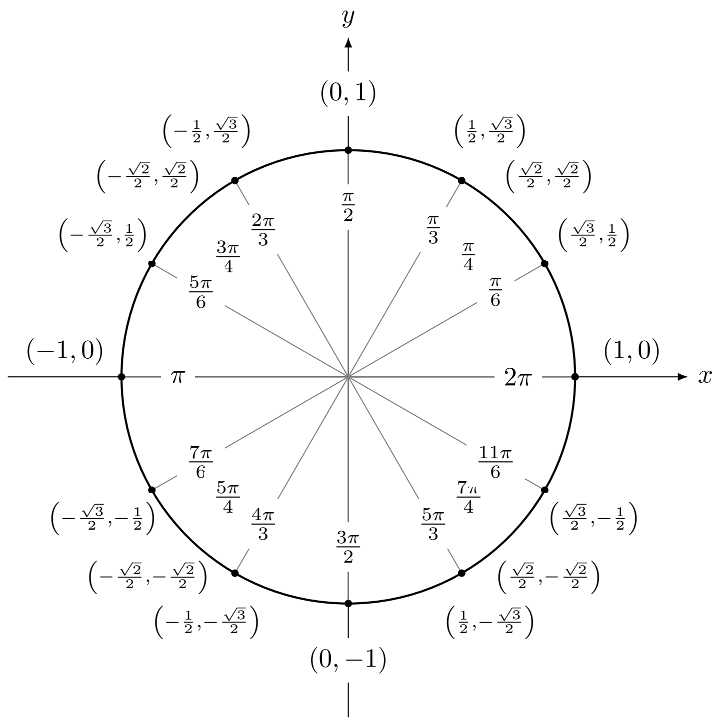
Les propriétés de ces fonctions sont résumées dans le tableau suivant.

	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
domaine	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} - \frac{\pi}{2}(2\mathbb{Z}+1)$
parité	impaire	paire	impaire
période	2π	2π	π
f'	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$1+\tan^2(x)$
primitive	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$
graphe			

Angles associés :



Quelques valeurs de sin et cos :



3.2 Fonctions Trigonométriques Inverses

En première intention, les fonctions arcsin, arccos et arctan sont les réciproques des fonction sin, cos et tan respectivement. Mais comme ces trois fonctions ne sont **pas** des bijections, il va falloir au préalable restreindre les intervalles de départ **et** d'arrivée. On a, à priori des choix à faire ici, mais ils sont **imposés** par la communauté. Ainsi, le résultat clé pour définir les fonctions arcsin, arccos et arctan est la proposition suivante.

Proposition III.12

Les fonctions suivantes

$$\begin{array}{rcl} \sin\ : [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1;1] \\ \cos\ : \quad [0;\pi] & \longrightarrow & [-1;1] \\ \tan :]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

sont bijectives.

Preuve

Cela se voit facilement sur les tableaux de variation de ces fonctions.

La proposition III.12 permet de définir les trois fonctions réciproques :

$$\begin{array}{rcl} \arcsin\ : [-1;1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \\ \arccos\ : [-1;1] & \longrightarrow & [0;\pi] \\ \arctan : \quad \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\end{array}$$

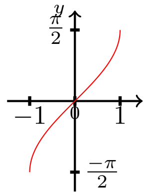
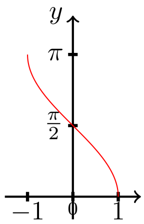
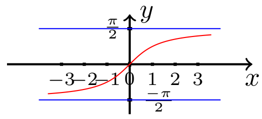
Attention : si les implications

$$\begin{array}{rcl} y=\arcsin(x) & \Rightarrow & \sin(y)=x \\ y=\arccos(x) & \Rightarrow & \cos(y)=x \\ y=\arctan(x) & \Rightarrow & \tan(y)=x \end{array}$$

sont vraies, leurs réciproques sont fausses. Elles ne sont valables que pour certains x :

$$\sin(y) = x \text{ ET } -\tfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \tfrac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; y = \arcsin(x)$$
$$\cos(y) = x \text{ ET } 0 \leqslant y \leqslant \pi \;\Rightarrow\; y = \arccos(x)$$
$$\tan(y) = x \text{ ET } -\tfrac{\pi}{2} < y < \tfrac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; y = \arctan(x)$$

Les autres propriétés de ces fonctions sont résumées dans le tableau suivant.

	$\arcsin(x)$	$\arccos(x)$	$\arctan(x)$
domaine	$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$	$[0; \pi]$	$\mathbb{R}$
parité	impaire	rien	impaire
f'	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
graphe			

Formulaire

S'il n'y en avait qu'une...

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Angles associés

$$\begin{array}{lll} \sin(-x) = -\sin(x) & \sin(\pi - x) = \sin(x) & \sin(\pi + x) = -\sin(x) \\ \cos(-x) = \cos(x) & \cos(\pi - x) = -\cos(x) & \cos(\pi + x) = -\cos(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x) & \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x) \\ \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x) & \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x) \end{array}$$

Formules d'addition

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \quad \cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

Formules de linéarisation

$$\sin^2(a) = \tfrac{1-\cos(2a)}{2} \quad \cos^2(a) = \tfrac{1+\cos(2a)}{2} \quad \tan^2(a) = \tfrac{1-\cos(2a)}{1+\cos(2a)}$$

Passage d'un produit à une somme

$$\begin{array}{l} \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b)) \\ \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) + \cos(a + b)) \\ \cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a + b) - \sin(a - b)) \end{array}$$

Passage d'une somme à un produit

$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin(\tfrac{p+q}{2})\cos(\tfrac{p-q}{2})) \quad \cos(p) + \cos(q) = 2\cos(\tfrac{p+q}{2})\cos(\tfrac{p-q}{2}))$$

En fonction de $t = \tan(\frac{a}{2})$

$$\cos(a) = \tfrac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin(a) = \tfrac{2t}{1+t^2} \quad \tan(a) = \tfrac{2t}{1-t^2}$$

Quelques valeurs

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

4 Logarithme et exponentielle

4.1 Exponentielle

On admet (provisoirement) le théorème suivant.

Théorème III.13. Caractérisation de l'exponentielle

Il existe une unique fonction dérivable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Cette fonction est notée $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \exp(x)$.

L'exponentielle transforme addition en multiplication :

Théorème III.14: Exponentielle d'une somme

Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$, on a

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

Par ailleurs,

$$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$$

Preuve

Fixons $y \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)\exp(y)}$. On vérifie que g est dérivable, que sa dérivée vaut 0 et que g vaut 1 en 0. On en déduit que g est la fonction constante égale à 1.
Pour fonctionner cette preuve nécessite d'avoir montré que exp ne s'annule pas. En effet, on a divisé par $\exp x . \exp y$. On peut procéder ainsi. Posons $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \exp(x)\exp(-x)$. On vérifie que h est dérivable, que sa dérivée vaut 0 et que h vaut 1 en 0. On en déduit que h est la fonction constante égale à 1. Donc exp ne s'annule pas.

La démonstration implique que exp ne s'annule jamais ($\exp(x).\exp(-x) = 1$). Mais alors par le théorème des valeurs intermédiaires

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \exp(x) > 0.$$

On pose $e = \exp(1) \simeq 2,718\dots$. On note parfois $e^x := \exp(x)$. Les formules se mettent alors à ressembler aux formules connues pour les puissances entières :

$$e^1 = e \quad e^{x+y} = e^x e^y \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

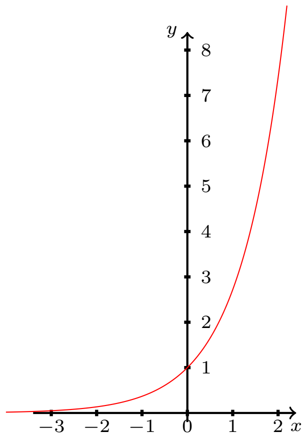
Proposition III.15

La fonction exp est strictement croissante et

$$\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty}\exp(x)=+\infty\\ \lim_{x\to-\infty}\exp(x)=0\end{array}$$

Preuve

Comme exp est croissante la limite en $+\infty$ existe dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Elle ne peut être finie car $\lim_{x\to+\infty}\exp(2+x)=\exp(2)\lim_{x\to+\infty}\exp(x)$ et $\exp(2)>\exp(0)=1$.
Comme $\exp(x)=\frac{1}{\exp(-x)}$ la limite en $-\infty$ en découle.



4.2 Logarithme

Théorème III.16: Définition du logarithme

L'application $\exp:\mathbb{R}\longrightarrow]0,+\infty[$ est une bijection. Sa fonction réciproque est notée $\ln:]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$. Autrement dit la fonction ln est définie par la relation

$$\exp(\ln(x))=x\qquad\forall x\in]0,+\infty[.$$

Preuve

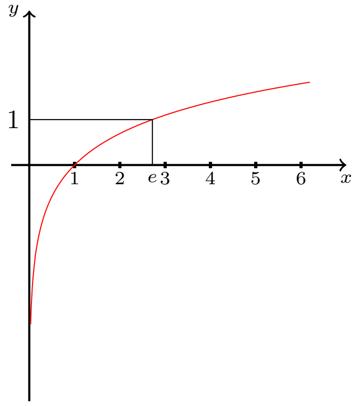
Ceci est une conséquence du tableau de variation de exp et du théorème des valeurs intermédiaires (que nous démontrerons plus tard).

Les principales propriétés de ln sont résumées ici :

Théorème III.17: Propriétés de ln

(i) La fonction $\ln:]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ est bijective.
(ii) $\ln(1)=0$, $\ln(e)=1$.
(iii) Pour tout $x,y\in]0,+\infty[$, on a $\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$ et $\ln(\frac{x}{y})=\ln(x)-\ln(y)$.
(iv) La fonction ln est croissante.
(v) Ses limites sont $\lim_{x\to0,x>0}\ln(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$.

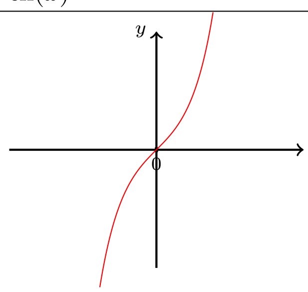
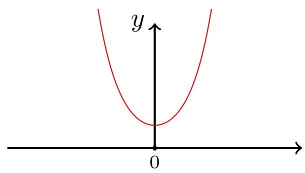
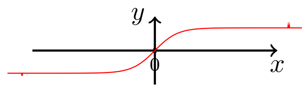
(vi) La fonction ln est dérivable et sa dérivée est $]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{x}$.



4.3 Les fonctions hyperboliques

On définit 3 fonctions sur $\mathbb{R}$ par les formules suivantes

$$\text{sh} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \qquad \text{ch} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array} \qquad \tanh : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{array}$$

	sh(x)	ch(x)	tanh(x)
domaine	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
parité	impaire	paire	impaire
$\lim_{x \to +\infty}$	$+\infty$	$+\infty$	1
$\lim_{x \to -\infty}$	$-\infty$	$+\infty$	-1
f'	ch(x)	sh(x)	$1 - \tanh^2(x)$
graphe			

Formulaire

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$$

Exponentielle

$$\exp(x) = \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) \qquad \exp(-x) = \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)$$

Formule de puissance

$$(\operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x))^n = \operatorname{sh}(nx) + \operatorname{ch}(nx) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Formules d'addition

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) \qquad \operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$$

Pour $a = b$, on obtient

$$\operatorname{sh}(2a) = 2\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) \qquad \operatorname{ch}(2a) = \operatorname{ch}(a)^2 + \operatorname{sh}(a)^2 \qquad \tanh(2a) = \frac{2\tanh(a)}{1+\tanh^2(a)}$$

Formules de linéarisation

$$\operatorname{sh}^2(a) = \frac{\operatorname{ch}(2a) - 1}{2} \qquad \operatorname{ch}^2(a) = \frac{\operatorname{ch}(2a) + 1}{2} \qquad \tanh^2(a) = \frac{\operatorname{ch}(2a) - 1}{\operatorname{ch}(2a) + 1}$$

Passage d'une somme à un produit

$$\operatorname{sh}(p) + \operatorname{sh}(q) = 2\operatorname{sh}(\frac{p+q}{2})\operatorname{ch}(\frac{p-q}{2}) \qquad \operatorname{ch}(p) - \operatorname{ch}(q) = 2\operatorname{sh}(\frac{p+q}{2})\operatorname{sh}(\frac{p-q}{2})$$

Valeurs à l'origine

$$\operatorname{sh}(0) = 0 \qquad \operatorname{ch}(0) = 1 \qquad \tanh(0) = 0$$

4.4 Fonctions puissances

Dans cette section, nous étudions les fonctions puissances a^α. La définition est un peu délicate car le domaine de définition de $a \mapsto a^\alpha$ dépend de α. Avant de rentrer dans le détail, on donne le formulaire :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 1^\alpha = 1 & a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta} & (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta} \\ & (ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha & a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha} \end{array}}$$

Détaillons à présent la définition de a^α en fonction de la valeur de α.

Le cas α entier naturel : $\alpha = n \in \mathbb{N}$.
Dans ce cas, $a^n = a \times \cdots \times a$, n fois est défini pour tout $a \in \mathbb{R}$. Remarquons que $a \mapsto a^n$ de $\mathbb{R}$ dans lui-même a la même parité que n.

Le cas α entier négatif : $\alpha = n \in -\mathbb{N}^*$.
Dans ce cas,

$$a^n = \frac{1}{a} \times \cdots \times \frac{1}{a} \qquad (-n) \text{ fois}$$

est défini pour tout $a \in \mathbb{R}^*$.

Le cas où α l'inverse d'un entier naturel : $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{N}^*$.
Dans ce cas, $a^{\frac{1}{n}}$ est la racine n^{ieme} de a, elle est définie pour

$$\begin{array}{ll} a \in [0; +\infty[& \text{si } \frac{1}{\alpha} \text{ est pair} \\ a \in \mathbb{R} & \text{si } \frac{1}{\alpha} \text{ est impair} \end{array}$$

Le cas où α réel. $\alpha \in \mathbb{R}$.
Ici, a^α est défini pour tout $a \in]0; +\infty[$ par la formule

$$\boxed{a^\alpha := \exp(\alpha \ln(a))}$$

Quelques limites comparées. Pour $\alpha, \beta > 0$, on a

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^\alpha} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\ln(x)^\beta} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x)^\beta = 0}$$

Chapitre 4

Suites réelles

Sommaire

Nous allons définir dans ce chapitre et le suivant une notion fondamental en analyse, celle de limite. Qu'ont en commun les objets suivants :

(i) Une dérivée ?

(ii) Une intégrale ?

(iii) Une somme infinie ?

(iv) La longueur d'une courbe ?

Ce sont toutes des **limites**. Bien que les mathématiciens utilisent ces différents objets depuis la renaissance, ce n'est que vers la fin du 18^e siècle et le début du 19^e siècle que la notion de limite, grâce à D'Alembert et à Cauchy, commence à être formalisée. Le cours d'analyse de Cauchy, alors qu'il professait à l'école Polytechnique, allait d'ailleurs devenir une référence pour tout travail en analyse au 19^e siècle. Malgré la grande rigueur de son contenu, il subsistait des lacunes, comme une preuve, fausse, que la limite d'une série de fonctions continues est continue. Le mathématicien allemand Karl Weierstrass vers 1860 et ses élèves formalisèrent définitivement la notion de limite et parachevèrent l'œuvre de Cauchy. La forme actuelle de la définition d'une limite est exactement celle donnée par Weierstrass.
Il vous faudra prendre le temps dans ce chapitre de bien comprendre les nouvelles notions, de faire et refaire les démonstrations. Il a fallu plusieurs siècles pour que les mathématiciens formalisent ces concepts correctement. Il est alors naturel que ceux-ci vous demandent un travail approfondi. Vous êtes en train de préparer les fondations sur lesquelles seront construites toute votre connaissance en analyse.

1 Définitions et exemples

Définition IV.18: Suite réelle

Une *suite réelle* est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On note souvent la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme une liste de valeurs indexées par $\mathbb{N}$.

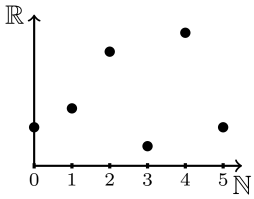
Voici deux exemples simples

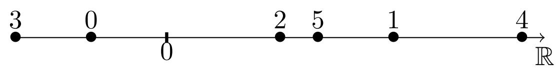
$$U_n = 3n + 7 \qquad V_n = (1 + \frac{1}{n})^n.$$

On peut se représenter une suite comme un tableau infini à deux lignes dont la première ligne est la suite des entiers :

0	1	2	3	4	5	...
e	π	-7	$\frac{1}{\pi}$	4	$\ln 2$	...

On peut aussi se représenter une suite comme un graphe, ou une famille de nombres réels numérotés sur la droite réelle :





Définition IV.19: Monotonie

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *croissante* si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad U_{n+1} \geqslant U_n.$$

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *décroissante* si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad U_{n+1} \leqslant U_n.$$

On dit qu'une suite est *monotone* si elle est croissante ou décroissante.
La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *majorée* si

$$\exists M \in \mathbb{R} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad U_n \leqslant M.$$

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *minorée* si

$$\exists m \in \mathbb{R} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad U_n \geqslant m.$$

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* si

$$\exists M \in \mathbb{R} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |U_n| \leqslant M.$$

Exercice 9. *(i) Illustrer par des exemples et contre-exemples chacune de ces définitions.*

(ii) Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si

$$\forall m \geqslant n \qquad U_m \geqslant U_n.$$

(iii) Montrer qu'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

On trouve aussi souvent des *suites définies par une relation de récurrence.* Le terme $n+1$ dépend alors du terme n (voire même d'autres termes précédents). Il faut alors donner une (ou plusieurs) valeur initiale. Voici deux exemples célèbres

$$\left\{\begin{array}{l} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + \frac{2}{U_n}) \end{array}\right.$$

Soit N un entier naturel. On pose alors

$$\left\{\begin{array}{l} V_0 = N \\ V_{n+1} = \left\{\begin{array}{ll} \frac{V_n}{2} & \text{si } V_n \text{ est pair} \\ 3V_n + 1 & \text{si } V_n \text{ est impair} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Remarques. (i) La suite U_n ci-dessus permet de calculer les décimales de $\sqrt{2}$. Elle peut s'obtenir par une méthode générale d'approximation des racines d'une équation appelée méthode de Newton.

(ii) La suite V_n est la suite de Syracuse. Elle est l'objet d'une conjecture complètement ouverte malgré un énoncé simple. Remarquons que si $N = 1$, alors la suite est

$$1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$$

La conjecture dit que quelquesoit le premier terme la suite finira par boucler sur le motif ci-dessus. Plus formellement

$$\forall N \qquad \exists n_0 \quad V_{n_0} = 1.$$

1.1 Un exemple historique

A l'origine, les suites sont apparues comme des moyens d'approcher des nombres qui n'étaient pas accessibles par des calculs explicites. Il faut d'abord se souvenir que dans l'antiquité, les mathématiques étaient principalement utilisées pour mesurer, c'est-à-dire calculer des longueurs et des aires.
Par exemple, au premier siècle après JC, Héron d'Alexandrie se demanda comment calculer l'aire d'un triangle. La donnée la plus facile à mesurer est sans doute les longueurs a, b et c de ses côtés. Il trouva que la surface S d'un tel triangle était donnée par la formule

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

où $p = \frac{a+b+c}{2}$ est le demi-périmètre.

Héron d'Alexandrie examina l'exemple où $a = 7$, $b = 8$ et $c = 9$. Il obtient alors $S = \sqrt{720}$. Devant une telle expression, notre réflexe est de se jeter sur notre calculatrice, mais il n'en avait pas ! ! Voici ce qu'il écrivit :
« Puisque alors les 720 n'ont pas le côté exprimable, nous prendrons le côté avec une très petite différence ainsi. Puisque le carré le plus voisin de 720 est 729 et il a 27 comme côté, divise les 720 par le 27 : il en résulte 26 et deux tiers. Ajoute les 27 : il en résulte 53 et deux tiers. De ceux-ci la moitié : il en résulte 26 2' 3'. Le côté approché de 720 sera donc 26 2' 3'. En effet 26 2' 3' par eux-mêmes : il en résulte 720 36', de sorte que la différence est une 36e part d'unité. Et si nous voulons que la différence se produise par une part plus petite que le 36', au lieu de 729, nous placerons les 720 et 36' maintenant trouvés et, en faisant les mêmes choses, nous trouverons la différence qui en résulte inférieure, de beaucoup, au 36' »
La première chose qui saute aux yeux est le langage utilisé. On voit que la notion de racine carré est évoquée de manière géométrique : « on ne peut pas trouver le côté du carré d'aire 720 ». Ensuite la représentation décimale des nombres est absentes. Mais ces remarques ne sont pas l'essentiel pour notre cours.
Il souligne le fait que $\sqrt{720}$ n'est pas un nombre rationnel et ressent donc le besoin de calculer des approximations rationnelles de ce nombre réel. Pour cela il remarque que $27^2 = 729$ est voisin de 720. Donc

$$\sqrt{720} \simeq 27.$$

Ainsi une première approximation d'un carré d'aire 720 est un rectangle de côté

$$27 \times 720/27.$$

Ensuite, pour obtenir un rectangle plus proche d'un carré il impose qu'un de ses côté b est la moyenne des deux côtés précédents et l'aire toujours 720. Il obtient un rectangle

$$\frac{27 + \frac{720}{27}}{2} \times \frac{2 * 720}{27 + \frac{720}{27}}.$$

Et

$$\sqrt{720} \simeq \frac{27 + \frac{720}{27}}{2} = \frac{161}{6} = 26,833333\ldots$$

Au fait, aujourd'hui notre calculatrice nous dit

$$\sqrt{720} = 26,832815729997476\ldots$$

Mais d'ailleurs, comment fait-elle ?
Il a donc drôlement gagné en précision par rapport à la première approximation de 27. Mais pourquoi s'arrêter en si bon chemin. On peut remplacer le dernier rectangle obtenu par

$$\frac{\frac{161}{6} + \frac{720*6}{161}}{2} \times \frac{2 * 720}{\frac{161}{6} + \frac{720*6}{161}}.$$

On obtient alors l'approximation :

$$\sqrt{720} \simeq \frac{51841}{1932} = 26,832815734989\ldots$$

Pas mal, n'est-ce pas ! Et de plus, comme le dit Héron d'Alexandrie, nous pourrions continuer...

Aujourd'hui, nous dirions que la suite de Héron est définie par

$$\begin{cases} U_0 = 27 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + \frac{720}{U_n}}{2} \end{cases}$$

et converge vers $\sqrt{720}$.

Mais aujourd'hui, les choses sont-elles si différentes que dans l'antiquité. Et bien pas tant que ça. En effet, notre calculatrice, pour obtenir $\sqrt{720}$ utilise aussi une suite de nombres calculables grâce aux opérations de base et convergeant vers $\sqrt{720}$, peut-être même la suite de Héron ! !

Lorsque l'on applique cette méthode pour calculer $\sqrt{2}$, on obtient :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + \frac{2}{U_n}}{2} \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} &U_0 = 1 \\ &U_1 = 1,5 \\ &U_2 = 1,4166\ldots \\ &U_3 = 1,4142156\ldots \\ &U_4 = 1,4142135623745\ldots \\ &U_5 = 1,414213562373095048801689\,6\ldots \end{aligned}$$

Et notre calculatrice nous dit

$$\sqrt{2} = 1,414213562373095\ldots$$

C'est fou, non ?

1.2 Opérations

Etant donnés deux suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un scalaire λ, on peut former

- La somme $(U_n + V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme n est $U_n + V_n$;
- Le produit $(U_n.V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme n est $U_n.V_n$;
- La multiplication par le scalaire λ : $(\lambda U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme n est λU_n.

Souvent on s'intéresse aux propriétés asymptotiques des suites, c'est-à-dire valables pour les grandes valeurs de n. Un vocable très utilisé pour cela est « à partir d'un certain rang ». Ainsi, une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une propriété P à partir d'un certain rang si et seulement si

$$\exists N \in \mathbb{N} \qquad \text{t.q. la suite } (U_{N+n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ a la propriété } P.$$

1.3 Des suites classiques

Soit $r \in \mathbb{R}$. Une *suite arithmétique de progression* r est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + r.$$

Son terme général est donné par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0 + nr.$$

La somme des premiers termes est donnée par

$$\boxed{\textstyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2}.}$$

Soit $q \in \mathbb{R}^*$. Une *suite géométrique de raison* q est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = qu_n.$$

Son terme général est donné par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0 q^n.$$

La somme des premiers termes est donnée par

$$\boxed{\textstyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} u_0\frac{q^{n+1}-1}{q-1} \text{ si } q \neq 1 \\ u_0(n+1) \text{ si } q = 1. \end{cases}}$$

On mélange maintenant ces deux types de suites. Soit $r \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}^*$. Une *suite arithmético-géométrique* est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = qu_n + r.$$

On suppose $q \neq 1$, sinon on a une suite arithmétique. On pose alors

$$a = \frac{r}{1-q}.$$

Son terme général est donné par

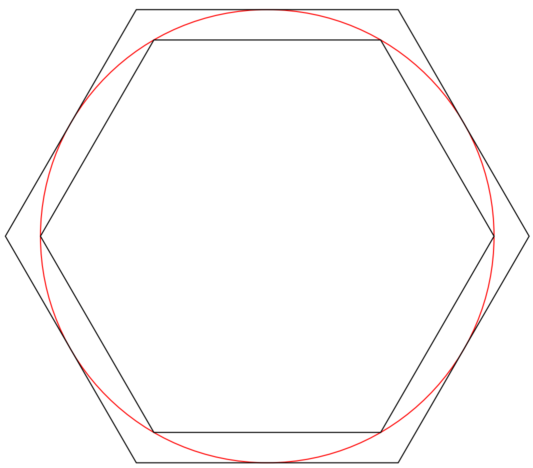
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = (u_0 - a)q^n + a.}$$

La somme des premiers termes est donnée par

$$\boxed{\textstyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (u_0 - a)\frac{q^{n+1}-1}{q-1} + (n+1)a.}$$

1.4 Un exemple géométrique : π

Nous présentons ici la méthode d'Archimède d'approximation de π. Il s'agit d'interpréter π comme le demi-périmètre du cercle unité et d'approcher celui-ci avec des polygones ayant de plus en plus de côtés. Ce qui fait fonctionner la méthode, et introduit des suites est que la périmètre d'un polygone obtenu à une étape donnée est une fonction simple (enfin pas très compliquée) d'un périmètre du polygone d'avant.
Précisons les choses. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. Fixons un entier $N \geqslant 3$. Soit $\mathcal{P}$ un polygone régulier à N côtés inscrit dans le cercle et $\mathcal{Q}$ un polygone régulier à N côtés circonscrit au cercle.
Pour $N = 6$, on obtient



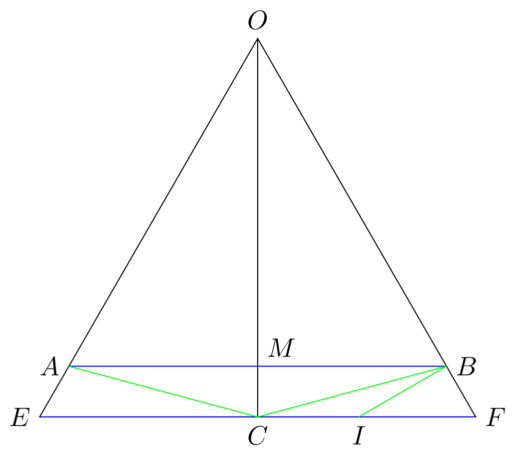
Soit a et b les longueurs des côtés de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ respectivement. On a l'encadrement

$$Na \leqslant 2\pi \leqslant Nb. \tag{1.1}$$

L'idée est alors de doubler le nombre de côtés : considérons les polygones $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{Q}'$ inscrits et circonscrits avec $2N$ côtés. Notons a et b les longueurs des côtés de $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{Q}'$. L'idée est double. D'un côté

$$2Na' \leqslant 2\pi \leqslant 2Nb' \tag{1.2}$$

est un meilleur encadrement de 2π et de l'autre a' et b' s'expriment simplement en fonction de a et b.
Pour montrer cela considérons la figure suivante



où

(i) A, B et C sont des points du cercle ;

(ii) AB est un côté de p ;

(iii) CB est un côté de p' ;

(iv) EF est un côté de P ;

(v) M est l'intersection de (AB) et (OC) ;

(vi) I est un sommet de P'.

En bleu nous avons des côtés de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ et en vert des côtés et demi-côtés de $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{Q}'$. Ainsi, on a

$$a = AB \qquad a' = CB \qquad b = EF \qquad b' = 2BI.$$

Nous allons à présent montrer des relations entre ces quantités. Comme $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ont le même nombre de côtés ils sont homothétiques donc

$$b.OM = a.$$

La droite (IB) est un côté de $\mathcal{Q}'$ donc tangente au cercle. Mais alors (IB) est orthogonale à (OB). Mais alors les triangles (OCF) et (IBF) ont deux anlges égaux : ils sont donc semblables. En particulier

$$\frac{IB}{IF} = \frac{OC}{OF}.$$

Or I est un sommet de $\mathcal{Q}'$ sur le côté inclus dans la droite (EF) et C est le milieu de ce côté. Donc $2CI = b'$. Enfin $IB = b'/2$, $IF = (b - b')/2$.
Par ailleurs, par le théorème de Thales, $\frac{OC}{OF} = \frac{OM}{OB} = OM$. On obtient donc

$$\frac{b'}{b - b'} = \frac{a}{b},$$

qui peut se réécrire

$$b' = \frac{ab}{a + b}. \tag{1.3}$$

Les sommets du triangle (ACB) sont trois sommets consécutifs de $\mathcal{P}'$. Les sommets du triangle (CIB) sont un sommet de $\mathcal{Q}'$ et les milieux des deux côtés adjacents. On en déduit que ceux sont deux triangles isocèles partageant un angle : ils sont semblables. Mais alors

$$\frac{a'}{a/2} = \frac{b'}{a'},$$

qui peut se réécrire

$$2(a')^2 = ab'. \tag{1.4}$$

En réitérant ce procédé, on obtient deux suites U_n (égale à $(Na)/2$) et $V_n = (Nb)/2$) telles ques

$$\begin{cases} V_{n+1} = & \frac{2U_nV_n}{U_n+V_n} \\ U_{n+1} = & \sqrt{U_nV_{n+1}} \end{cases}$$

On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad U_n \leqslant 2\pi \leqslant V_n$$

et la longueur de l'intervalle $V_n - U_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

2 Convergence d'une suite

2.1 Définitions

Vient ici, la définition la plus importante de ce cours.

Définition IV.20: Limite d'une suite

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et l un nombre réel. On dit que *la suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* l si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \implies |U_n - l| \leqslant \varepsilon).$$

On note alors

$$U_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l.$$

On dit aussi que *la limite de la suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vaut* l et on écrit

$$\lim_{n\to\infty} U_n = l.$$

Pour comprendre la définition, on remarquera que

(i) La condition $|U_n - l| < \varepsilon$ est équivalente à $l - \varepsilon < U_n < l + \varepsilon$ ou encore à $U_n \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$ ou encore que l'écart entre U_n et l est inférieur à ε.

(ii) Le bout de phrase « $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \implies$ » signifie « à partir d'un certain rang N on a ».

(iii) Plus ε est petit, plus la condition $|U_n - l| < \varepsilon$ est contraignante pour U_n.

Ainsi, on peut traduire cette définition par la phrase : aussi petit que soit un intervalle fixé autour de l, les éléments de la suite U_n appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang.

Exercice 10. *Montrer que la suite* $(\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* 0.

On traduit souvent intuitivement $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l par « U_n se rapproche de l lorsque n est grand ». S'il y a du vrai dans cette phrase, elle est trompeuse. En effet, on peut comprendre U_n est de plus en plus proche de l. Or cela est faux, comme le montre l'exemple suivant

Exercice 11. *Considérons la suite suivante*

$$U_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \textit{ est } \text{impair} \\ 0 & \text{si } n \textit{ est } \text{pair} \end{cases}$$

Montrer que U_n *tend vers* 0. *Expliquer en quoi* U_n *ne se rapproche pas de* 0, *lorsque* n *augmente.*

Ainsi, il vaut mieux dire « U_n est proche de l lorsque n est grand ». Comme, en math, nous n'avons pas d'ordres de grandeur (celles-ci dépendent du contexte d'application), on traduit « proche » par aussi proche que l'on veut. Ainsi, on arrive à la phrase suivante qui est très proche de la définition

$$U_n \text{ est aussi proche que l'on veut } l \text{ pourvu que } n \text{ soit grand.}$$

Remarque. L'auteur de ce cours préfère l'expression « tend vers » à « la limite est égale » (idem pour les notations). En effet, l'expression *la limite de la suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vaut* l peut laisser croire que la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une quantité bien définie et qu'elle vaut l. Or il n'en est rien comme nous allons le voir.

Définition IV.21: Divergence

S'il existe une limite $l \in \mathbb{R}$, on dit que la suite *converge*. Sinon, on dit qu'elle *diverge*.

ATTENTION. La limite n'existe pas toujours.

Exercice 12. *Considérons la suite* $U_n = (-1)^n$. *Montrer que cette suite diverge.*

Une manière de comprendre une assertion mathématique est de comprendre sa négation.

Exercice 13. *Traduire par une phrase mathématique, l'affirmation* U_n *ne tend pas vers* l.

2.2 Propriétés fondamentales des suites convergentes

Théorème IV.22. Unicité de la limite

La limite d'une suite, si elle existe est unique.

Preuve

Soit U_n une suite qui tend vers l_1 et l_2. Montrons par l'absurde que $l_1 = l_2$. Supposons donc que $l_1 \neq l_2$. Posons
$$\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{3}.$$
Par définition de la convergence, il existe N_1 et N_2 dans $\mathbb{N}$ tels que
$$\forall n \geqslant N_1 \qquad |U_n - l_1| \leqslant \varepsilon$$
et
$$\forall n \geqslant N_2 \qquad |U_n - l_2| \leqslant \varepsilon.$$
Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Alors
$$U_N \in [l_1 - \varepsilon; l_1 + \varepsilon] \cap [l_2 - \varepsilon; l_2 + \varepsilon].$$
Or, vu la valeur de ε, cette intersection est vide. Contradiction.

Théorème IV.23

Toute suite convergente est bornée.

Preuve

Soit U_n une suite qui converge vers une limite l. Appliquons la définition de la limite avec $\varepsilon = 1$:
$$\exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geqslant N \qquad l - 1 \leqslant U_n \leqslant l + 1.$$

Considérons
$$M = \max\{U_0, U_1, \dots, U_{N-1}, l+1\}$$
et
$$m = \min\{U_0, U_1, \dots, U_{N-1}, l-1\}.$$
Ces réels sont bien définis car les ensembles sont finis. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n < N$, alors $U_n \leqslant M$. Si $n \geqslant N$ alors $U_n \leqslant l+1 \leqslant M$. Ainsi dans tous les cas on a $U_n \leqslant M$. De même, on montre que $U_n \geqslant m$. Ainsi
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad m \leqslant U_n \leqslant M.$$

2.3 Opérations

Théorème IV.24. Combinaison linéaire

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Soit α et β deux nombres réels. On suppose que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite l_1 et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l_2.
Alors, la suite $(\alpha U_n + \beta V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\alpha l_1 + \beta l_2$.

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$. Posons
$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|}.$$
Remarquons que si α et β sont nuls l'énoncé est trivial. Sinon ε_1 est bien défini et strictement positif. Par définition de la convergence, il existe N_1 et N_2 dans $\mathbb{N}$ tels que
$$\forall n \geqslant N_1 \qquad |U_n - l_1| \leqslant \varepsilon_1$$
et
$$\forall n \geqslant N_2 \qquad |V_n - l_2| \leqslant \varepsilon_1.$$
Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Alors, pour tout $n \geqslant N$
$$\begin{array}{rcll} |\alpha U_n + \beta V_n - \alpha l_1 - \beta l_2| & = & |\alpha(U_n - l_1) + \beta(V_n - l_2)| & \\ & \leqslant & |\alpha(U_n - l_1)| + |\beta(V_n - l_2)| & \text{par I.T.} \\ & \leqslant & |\alpha|\ |U_n - l_1)| + |\beta|\ |(V_n - l_2)| & \\ & \leqslant & (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon_1 & \\ & \leqslant & \varepsilon & \end{array}$$
Ainsi, $(\alpha U_n + \beta V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\alpha l_1 + \beta l_2$.

Théorème IV.25. Produit

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite l_1 et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l_2.
Alors, la suite $(U_n.V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $l_1.l_2$.

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$. La suite U_n est convergente, donc elle est bornée :
$$\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |U_n| \leqslant M. \tag{2.1}$$

Posons
$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M + |l_2|}.$$
Par définition de la convergence, il existe N_1 et N_2 dans $\mathbb{N}$ tels que
$$\forall n \geqslant N_1 \qquad |U_n - l_1| \leqslant \varepsilon_1 \tag{2.2}$$
et
$$\forall n \geqslant N_2 \qquad |V_n - l_2| \leqslant \varepsilon_1. \tag{2.3}$$
Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Alors, pour tout $n \geqslant N$
$$\begin{array}{rcll} |U_nV_n - l_1l_2| & = & |U_n(V_n - l_2) + l_2(U_n - l_1)| & \\ & \leqslant & |U_n(V_n - l_2)| + |l_2(U_n - l_1)| & \text{par l'I.T.} \\ & \leqslant & |U_n|.|V_n - l_2| + |l_2|.|U_n - l_1| & \\ & \leqslant & |U_n|\varepsilon_1 + |l_2|\varepsilon_1 & \text{par (2.2) et (2.3)} \\ & & & \text{car } n \geqslant N_1 \text{ et } n \geqslant N_2 \\ & \leqslant & (M + |l_2|)\varepsilon_1 & \text{par (2.1)} \\ & \leqslant & \varepsilon & \end{array}$$
Ainsi, $(U_nV_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l_1l_2.

Théorème IV.26. Inverse

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui ne s'annule pas. On suppose que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite **non nulle** l.
Alors, la suite $(\frac{1}{U_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\frac{1}{l}$.

Preuve

Commençons par écrire l'inégalité que nous finirons par utiliser
$$|\frac{1}{U_n} - \frac{1}{l}| = \frac{|U_n - l|}{|l|.|U_n|} \leqslant \frac{\varepsilon_1}{|l|.|U_n|} \tag{2.4}$$
En particulier, il nous faut majorer $\frac{1}{|U_n|}$! Commence maintenant la preuve formelle.
Comme U_n tend vers $l \neq 0$,
$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N_1 \quad |U_n| \geqslant \frac{|l|}{2}.$$
Soit $\varepsilon > 0$. Posons
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon|l|^2.$$
Par définition de la convergence, il existe N_2 dans $\mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N_2 \qquad |U_n - l_1| \leqslant \varepsilon_1. \tag{2.5}$$
Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Alors, pour tout $n \geqslant N$
$$|\frac{1}{U_n} - \frac{1}{l}| = \frac{|U_n - l|}{|l|.|U_n|} \leqslant \frac{\varepsilon_1}{|l|.|U_n|} \leqslant \frac{2\varepsilon_1}{|l|^2} \leqslant \varepsilon.$$
Ainsi, la suite $(\frac{1}{U_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\frac{1}{l}$.

Remarque. En combinant les deux théorèmes précédents on obtient que $\frac{V_n}{U_n}$ tend vers $\frac{l_2}{l_1}$.

2.4 Suites et inégalités

On peut passer à la limite dans les inégalités **larges** :

Théorème IV.27. Limite dans inégalités larges

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles qui tendent respectivement vers des limites l_1 et l_2.
Si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad U_n \leqslant V_n$$

alors $l_1 \leqslant l_2$.

Preuve

Montrons le résultat par l'absurde. Supposons donc que $l_1 > l_2$. Posons

$$\varepsilon = \frac{l_1 - l_2}{3} > 0.$$

Par définition de la convergence, il existe N_1 et N_2 dans $\mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geqslant N_1 \qquad U_n \geqslant l_1 - \varepsilon$$

et

$$\forall n \geqslant N_2 \qquad V_n \leqslant l_2 + \varepsilon.$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Alors

$$U_N \geqslant l_1 - \varepsilon = l_2 + 2\varepsilon > l_2 + \varepsilon \geqslant V_N.$$

En particulier $U_N > V_N$; ce qui constitue une contradiction.

Corollaire IV.28

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers une limite l.
On a

(i) si M est un nombre réel tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad U_n \leqslant M$$

alors $l \leqslant M$;

(ii) si m est un nombre réel tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad U_n \geqslant m$$

alors $l \geqslant m$.

Preuve

Il suffit d'appliquer le théorème IV.27 avec une suite constante.

Théorème IV.29. Théorème des gendarmes

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad U_n \leqslant W_n \leqslant V_n.$$

On suppose en outre que U_n et V_n tendent vers **la même** limite l.
Alors, la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l.

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence, il existe N_1 et N_2 dans $\mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geqslant N_1 \qquad U_n \in [l-\varepsilon; l+\varepsilon]$$

et

$$\forall n \geqslant N_2 \qquad V_n \in [l-\varepsilon; l+\varepsilon].$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Alors,

$$\forall n \geqslant N \qquad V_n \text{ et } U_n \text{ appartiennent à } [l-\varepsilon; l+\varepsilon].$$

Fixons $n \geqslant N$. Alors, l'intervalle $[U_n, V_n]$ est inclus dans $[l-\varepsilon; l+\varepsilon]$. Or W_n appartient à cet intervalle. Donc $W_n \in [l-\varepsilon; l+\varepsilon]$.

Remarque. Pour appliquer le théorème des gendarmes, il convient de vérifier les 3 hypothèses :

(i) encadrement ;

(ii) convergence des bornes ;

(iii) égalité des limites de ces bornes.

2.5 Suites monotones

Théorème IV.30: Limites de suites monotones

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

(i) Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée alors U_n converge.

(ii) Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée alors U_n converge.

Preuve

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée. Posons

$$l := \sup\{U_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Puisque U_n est majorée cette borne supérieure est un nombre réel. Montrons que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l.
Soit $\varepsilon > 0$. Par définition du sup, $l-\varepsilon$ n'est pas majorant de la suite U_n. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $U_N > l-\varepsilon$. Puisque la suite est croissante on a

$$\forall n \geqslant N \qquad U_n \geqslant U_N > l-\varepsilon$$

Or l est un majorant, donc

$$\forall n \geqslant N \qquad l \geqslant U_n.$$

Ainsi,

$$\forall n \geqslant N \qquad l+\varepsilon > l \geqslant U_n > l-\varepsilon$$

et U_n tend vers l.

Pour la seconde assertion, considérons suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $V_n = -U_n$. On vérifie aisément que V_n est croissante et majorée. D'après la première assertion, il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $V_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$. En appliquant le théorème IV.24, on obtient : $U_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -l$.

Exercice 14. *Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée. Notons l sa limite. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$,*

$$l := \sup\{U_n \;:\; n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } n \geqslant N\}.$$

2.6 Suites adjacentes

Le théorème suivant est un moyen de montrer la convergence de suites.

Théorème IV.31. Suites adjacentes

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

(i) U_n est croissante ;

(ii) V_n est décroissante ;

(iii) $V_n - U_n$ tend vers 0.

Alors, les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l. De plus, pour tout m et n dans $\mathbb{N}$, on a $U_m \leqslant l \leqslant V_n$.

Preuve

Posons $W_n = V_n - U_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On étudie la monotonie de W_n. Pour tout n, on a

$$W_{n+1} - W_n = V_{n+1} - U_{n+1} - V_n + U_n = (V_{n+1} - V_n) - (U_{n+1} - U_n) \leqslant 0.$$

La dernière inégalité utilise les monotonies des suites U_n et V_n. Donc $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme W_n tend vers 0, on en déduit que W_n est positive :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad W_n \geqslant 0.$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad V_0 \geqslant V_n \geqslant U_n \geqslant U_0.$$

En particulier, les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées. Comme elles sont monotones, la proposition IV.30 montre que ces suites convergent vers des limites finies l_1 et l_2.
Par le théorème IV.24, la suite $(V_n - U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $l_2 - l_1$. Or elle tend vers 0. Donc, par unicité de la limite (théorème IV.22), on a $l_2 - l_1 = 0$ et $l_1 = l_2$.

Voici un premier exemple de suites adjacentes.

Exemple 3. Soit x un nombre réel. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$U_n = \frac{E(x10^n)}{10^n} \qquad V_n = \frac{E(x10^n)+1}{10^n}.$$

On peut montrer que les deux suites sont adjacentes. Ainsi, elles convergent vers la même limite qui se trouve être x.
On peut remarquer que les deux suites sont constituées de nombres rationnels : cette construction peut être utilisée pour définir le produit et la somme de deux nombres réels...

3 Suites extraites

3.1 Définition

La définition formelle de suite extraite est ainsi.

Définition IV.32: Suite extraite

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Une *suite extraite* de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $V_n = U_{\varphi(n)}$ pour une fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

Les éléments de la suite V_n sont certains éléments de la suite U_n. Le fait que φ soit strictement croissante dit que l'on garde dans V_n les éléments de U_n dans l'ordre où ils étaient et sans répétition.
Si U_n est représentée par un tableau infini, une suite extraite s'obtient en deux étapes

(i) On efface certaines colonnes tout en veillant à ce qu'il en reste une infinité.

(ii) On renumérote la première ligne pour obtenir la liste des entiers naturels.

Proposition IV.33

Une suite extraite d'une suite croissante, décroissante, majorée ou minorée l'est.

Preuve

Ceci est évident.

Exercice 15. *Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit φ et ψ deux applications strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite extraite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à φ. Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite extraite de $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à ψ.*
Montrer que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite extraite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à $\varphi\circ\psi$.

Remarque. Une suite extraite d'une suite extraite est une suite extraite.

Proposition IV.34

Une suite extraite d'une suite qui converge vers ℓ converge vers ℓ.

Preuve

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.
Vérifions tout d'abord que $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout n.
Considérons $E := \{0, \dots, n\}$. Comme φ est croissante, $\varphi(E)$ est inclus dans $\{0, 1, \dots, \varphi(n)\}$. Comme φ est injective, le cardinal de $\varphi(E)$ est égal à celui de E, c'est-à-dire $n + 1$. L'inclusion ci-dessus implique alors que

$$n + 1 \leqslant \varphi(n) + 1,$$

de laquelle découle l'égalité cherchée.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on a $|U_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Pour un tel n, comme $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N$, on a $|U_{\varphi(n)} - \ell| \leqslant \varepsilon$. CQFD.

3.2 Suites extraites complémentaires

Deux exemples courants de suites extraites soit les suites des termes pairs et impairs :

$$U_{2n} \qquad U_{2n+1}.$$

Ces deux suites extraites recouvrent toutes les valeurs de la suite. Cette remarque permet d'obtenir le résultat suivant.

Proposition IV.35

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Alors, se valent :

(i) la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;

(ii) les deux suites extraites $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers **la même limite**.

Preuve

La proposition IV.34 montre que (i) implique (ii).
Réciproquement, supposons que les deux suites extraites $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ. Montrons que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, on a $|U_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$. De même, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_2$, on a $|U_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Soit $n \geqslant max(2N_1, 2N_2 + 1)$. Alors, $|U_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. CQFD.

3.3 Suites extraites monotones

Théorème IV.36. Ramsey

De toute suite de nombres réels, on peut extraire une suite monotone.

Preuve

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Considérons l'ensemble suivant :

$$E := \{n \in \mathbb{N} : \forall m > n \quad U_m \geqslant U_n\}.$$

Deux situations se présentent :

Cas 1 : l'ensemble E est fini.
En particulier, l'ensemble E est borné. Donc

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad n \notin E,$$

c'est-à-dire

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \exists m > n \quad U_m < U_n \tag{3.1}$$

On construit alors, une suite n_k par récurrence telle que

— $n_{k+1} > n_k$ pour tout k ;

— $U_{n_{k+1}} < U_{n_k}$ pour tout k.

Posons $n_0 = N$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $N = n_0 < \cdots < n_k$ construits. Comme $n_k \geqslant N$, il existe $m > n_k$ tel que $U_m < U_{n_k}$. Il suffit de poser $n_{k+1} = m$.

Cas 2 : l'ensemble E est infini.
Dans ce cas, on note n_k le $(k+1)^{ieme}$ élément de E, pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, on a :

— $n_k \in E$, pour tout k dans $\mathbb{N}$;
— $n_{k+1} > n_k$, pour tout k dans $\mathbb{N}$.

On montre alors que la suite extraite $(U_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante : Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $n_k \in E$ et $n_{k+1} > n_k$, on a

$$U_{n_{k+1}} \geqslant U_{n_k}.$$

3.4 Le cas des suites bornées

Théorème IV.37. Bolzano-Weierstrass

Toute suite bornée admet une suite extraite convergente.

Preuve

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. D'après le théorème IV.36, il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(U_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
Or la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, la suite $(U_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi. Mais alors, la proposition IV.30 montre que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Ce théorème est important comme nous le verrons dans le chapitre consacré aux fonctions continues. La preuve présentée ici a le mérite d'être courte et l'inconvénient de sembler un peu miraculeuse. Une autre preuve, par dicotomie est possible. Cette dernière est assez difficile à écrire formellement mais se comprend bien...

Exemple 4. Regardons notre suite bornée, non convergent préférée : $U_n = (-1)^n$. Alors la suite extraite des nombres pairs tend vers 1 et celle des nombres impairs tend vers -1. On a construit deux suites extraites convergentes.

4 Limites infinies

4.1 Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que u_n tend vers $+\infty$, si u_n est aussi grand que l'on veut pourvu que n soit grand. Plus formellement :

Définition IV.38: Limites infinies

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers plus l'infini* si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad u_n \geqslant M.$$

On note alors

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers moins l'infini* si $-u_n$ tend vers $+\infty$. On note alors

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty.$$

4.2 Suites monotones, comparaisons

Théorème IV.39. Convergence des suites monotones

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle **croissante**. On a l'alternative suivante :

(i) soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;

(ii) soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Preuve

La suite est majorée ou pas. Si elle est majorée, la proposition IV.30 montre qu'elle converge. Supposons que u_n n'est pas majorée et montrons qu'elle tend vers $+\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$. Comme la suite n'est pas majorée par M, il existe N tel que $U_N > M$. Mais alors, pour tout $n \geqslant N$, $U_n \geqslant U_N > M$. Donc la suite tend vers $+\infty$.

Exercice 16. *(i) Construire une suite non majorée qui ne tend pas vers* $+\infty$.

(ii) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle non majorée. Montrer qu'elle admet une suite extraite qui tend vers* $+\infty$.

Théorème IV.40. Comparaison

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant v_n.$$

Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ il en va de même de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve

Soit $M \in \mathbb{R}$. Comme v_n tend vers $+\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N \qquad v_n \geqslant M.$$

Mais alors,

$$\forall n \geqslant N \qquad u_n \geqslant v_n \geqslant M.$$

Donc la suite u_n tend vers $+\infty$.

4.3 Opérations

On résume sans démonstration le comportement des limites infinies par le tableau ci-dessous. Ici, l_1 et l_2 sont des nombres réel (finis).

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim u_n + v_n$	$\lim u_n v_n$	$\lim \frac{u_n}{v_n}$	$\lim \frac{v_n}{u_n}$
l_1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ si $l_1 > 0$ $-\infty$ si $l_1 < 0$ FI si $l_1 = 0$	0	$+\infty$ si $l_1 > 0$ $-\infty$ si $l_1 < 0$ FI si $l_1 = 0$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI	FI
$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$	FI	FI

Ici FI signifie forme indéterminée.

5 Suites de Cauchy

Le critère de Cauchy est un critère équivalent à la convergence de la suite. La beauté de la chose et qu'il ne mentionne pas de limite. De manière relâchée, une suite de Cauchy est une suite dont les termes sont aussi proches que l'on veut les uns des autres, pourvu que leurs indices soient grands. De manière plus formelle :

Définition IV.41: Suite de Cauchy

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. La suite est dite *de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p, q \geqslant N \quad |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon.$$

Le théorème fondamental (on dit que $\mathbb{R}$ est *complet*) est :

Théorème IV.42. Cauchy et convergence

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;

(ii) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Preuve

Supposons que la suite converge disons vers l. Montrons qu'elle est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N \qquad |u_n - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit p et q supérieurs à N. Alors

$$|u_p - u_q| = |u_p - l - (u_q - l)| \leqslant |u_p - l| + |u_q - l| \leqslant 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc la suite est de Cauchy.

Supposons réciproquement que la suite est de Cauchy et montrons qu'elle converge. La difficulté est de construire la limite. La démonstration se décompose en 4 étapes.
<u>Etape 1</u> : Montrons que la suite est bornée.
Pour cela on écrit la définition d'être de Cauchy pour $\varepsilon = 1$ et $q = N$. On obtient : Pour tout $p \geqslant N$, $|u_p - u_N| \leqslant 1$. Donc $u_p \in [u_N - 1; u_N + 1]$. Par ailleurs, l'ensemble fini, $u_0, \ldots, u_{N-1}$ est borné car fini. Donc la suite est bornée.

<u>Etape 2</u> : Bolzano-Weierstrass
Grâce à l'étape 1, on appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass (théorème IV.37) : il existe une suite extraite $u_{\varphi(n)}$ convergente vers l.

<u>Etape 3</u> : $\varphi(m) \geqslant m$ pour tout m.
La restriction de φ est injective de $\{0, \ldots, m\}$ dans $\{\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(m)\}$ par stricte monotonie. L'étape 3 en découle.

<u>Etape 4</u> : Convergence de la suite vers l.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1 \qquad |u_{\varphi(n)} - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par ailleurs, la suite est de Cauchy. Donc, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p, q \geqslant N_2 \quad |u_p - u_q| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $n \geqslant N_2$. Soit $m \geqslant \max(N_1, N_2)$. Alors,

$$|u_n - l| \leqslant |u_n - u_{\varphi(m)}| + |u_{\varphi(m)} - l| \leqslant 2\frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc u_n converge vers l.

6 Suites récurrentes

On mentionne ici quelques propriétés de base des suites définies par une relation de récurrence. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow I$ une fonction. On considère alors une suite définie par la récurrence :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Il est important ici que $f(I) \subset I$. En effet, cela assure que $f(u_n)$ soit toujours bien défini.
Nous allons citer quelques résultats sur la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition IV.43

Si pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant x$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Preuve

L'hypothèse implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n.$$

Donc la suite est croissante.

La monotonie de la fonction a des conséquences sur la monotonie de la suite, mais celles-ci sont non triviales.

Proposition IV.44

On suppose que f est croissante.
Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Preuve

Supposons que $u_0 \leqslant u_1$. Montrons alors, par récurrence que la suite est croissante. L'hypothèse de récurrence est $H_n : u_n \leqslant u_{n+1}$.
H_0 est vrai par hypothèse. Supposons H_n vraie. On applique alors la fonction croissante à cette inégalité pour obtenir $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$ donc H_{n+1}.

Supposons maintenant que $u_0 \geqslant u_1$. Montrons alors, par récurrence que la suite est décroissante. L'hypothèse de récurrence est $H_n : u_n \geqslant u_{n+1}$.
H_0 est vrai par hypothèse. Supposons H_n vraie. On applique alors la fonction croissante à cette inégalité pour obtenir $f(u_n) \geqslant f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$ donc H_{n+1}.

Attention, la suite peut être décroissante ! C'est par exemple le cas si u_0 est la borne supérieure de l'intervalle.

Proposition IV.45

On suppose que f est décroissante.
Alors les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de variations opposées.

Preuve

Montrons que $f \circ f$ est croissante.
Soit $x \leqslant y$ dans I. Comme f est décroissante, on a $f(x) \geqslant f(y)$. Mais alors, comme f est décroissante, on a $f \circ f(x) \leqslant f \circ f(y)$. CQFD.

On remarque que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 \in I \\ u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

La proposition précédente implique que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Supposons par exemple que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Alors pour tout n, $u_{2(n+1)} \geqslant u_{2n}$. En appliquant la fonction décroissante f à cette inégalité, on obtient $f(u_{2(n+1)}) \leqslant f(u_{2n})$, c'est-à-dire $u_{2(n+1)+1} \leqslant u_{2n+1}$. Donc $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

De même, on montre que si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Devançons un peu le prochain chapitre.

Proposition IV.46

Si f est continue et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in I$ alors $f(l) = l$.

Preuve

On part de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ et on prend la limite. Par continuité le membre de droite tend vers $f(l)$. Celui de gauche tend vers l. Par unicité de la limite $f(l) = l$.

Chapitre 5

Limites et continuité

Sommaire

1 Intervalles de $\mathbb{R}$

Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ de la forme $[a;b]$, $]a;b[$, $[a;b[$ ou $]a;b]$, avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Les quantités a et b sont appelées les bornes de l'intervalle. On dit que I est *d'interieur non vide* si $a \neq b$. *L'interieur* de l'intervalle I est $]a;b[$.

2 Limites

2.1 Définitions et Opérations

Définition V.47: Limite continue

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit a dans I, ou une borne de I. Soit $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
On dit que f *tend vers l en a* si pour toute suite u_n d'éléments de I qui tend vers a, la suite $f(u_n)$ tend vers l.
On note alors $\lim_{x\to a} f(x) = l$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$.

Les théorèmes sur les suites et les opérations s'appliquent directement.

Théorème V.48. Limites et opérations

Soient f et g deux fonctions d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$. Soit a dans I ou une borne de I. Soit λ et μ dans $\mathbb{R}$.

(i) Si f tend vers l_1 en a et g tend vers l_2 en a alors $\lambda f + \mu g$ tend vers $\lambda l_1 + \mu l_2$ en a.

(ii) Si f tend vers l_1 en a et g tend vers l_2 en a alors fg tend vers $l_1 l_2$ en a.

(iii) Si f tend vers l_1 en a et g tend vers $l_2 \neq 0$ en a alors $\frac{f}{g}$ tend vers $\frac{l_1}{l_2}$ en a.

(iv) Supposons que f tend vers l_1 en a et g tend vers l_2 en a. Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $l_1 \leqslant l_2$.

De même le théorème des gendarmes donne :

Théorème V.49. Gendarmes

Soient f, g et h trois fonctions d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$. Soit a dans I ou une borne de I. On suppose que

$$\forall x \in I \qquad f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x).$$

Si f et g tendent vers la même limite l en a alors h tend vers l en a.

2.2 Composée

Une nouveauté par rapport aux suites : la composé de fonctions.

Théorème V.50. Composée de Limites

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soient $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a \in I$. On suppose que

(i) f tend vers y en a ;

(ii) $y \in J$ ou est une borne de J ;

(iii) g tend vers l en y.

Alors, $g \circ f$ tend vers l en a.

Preuve

Soit u_n une suite qui tend vers a. Alors $f(u_n)$ tend vers y car f tend vers y en a. Mais alors, $g(f(u_n)) = (g \circ f)(u_n)$ tend vers l car g tend vers l en y. Ainsi, $g \circ f$ tend vers l en a.

2.3 Cas des limites à gauche et à droite

Nous traitons ici d'un exemple. Soit $I = [a; b]$ un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit c dans l'intérieur de I et $l \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers l à droite de c si $f_{|]c,b]}$ tend vers l en c.
Remarquons que dans la définition de limite en un point, on ne regarde que des suites dont les éléments appartiennent à l'intervalle de définition de f. Ainsi, lorsque l'on dit que f tend vers l à droite de c, on ne considère que le comportement des suites d'éléments strictement supérieurs à c.

Théorème V.51. Limite de fonctions monotones

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit a dans I ou une borne de I.
Si f est monotone alors f admet des limites finies ou pas à gauche et à droite de a.

2.4 Avec des epsilons

Nous avons défini la convergence des suites à l'aide de quantificateurs et d'ε. On peut faire de même pour les fonctions. Considérons ici le cas de limite fini en un point de $\mathbb{R}$.

Théorème V.52. Limite et ε

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit a dans I, ou une borne réelle de I. Soit $l \in \mathbb{R}$.
Alors f tend vers l en a si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - a| \leqslant \delta \implies |f(x) - l| \leqslant \varepsilon. \tag{2.1}$$

Ce théorème dit que f tend vers l en a signifie que $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de l pourvu que x soit proche de a.

Preuve

Supposons que la condition (2.1) est satisfaite. Montrons que f tend vers l en a. Soit u_n une suite d'éléments de I telle que u_n tend vers a. Montrons que $f(u_n)$ tend vers l.
Soit $\varepsilon > 0$. Fixons $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I \quad |x - a| \leqslant \delta \implies |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$

Comme u_n tend vers a, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N \quad |u_n - a| \leqslant \delta.$$

Mais alors,
$$\forall n \geqslant N \quad |f(u_n) - l| \leqslant \varepsilon.$$
Donc $f(u_n)$ tend vers l. CQFD.

Réciproquement, supposons que f tend vers l en a. Montrons que la condition (2.1) est satisfaite. Pour cela on raisonne par l'absurde en supposant que la condition (2.1) n'est pas satisfaite.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in I \quad |x - a| \leqslant \delta \text{ et } |f(x) - l| > \varepsilon. \tag{2.2}$$

Fixons un ε satisfaisant la condition (2.2). Alors, pour $\delta = \frac{1}{n}$, il existe $x_n \in I$ tel que

(i) $|x_n - a| \leqslant \frac{1}{n}$; et

(ii) $|f(x_n) - l| > \varepsilon$.

La suite x_n ainsi construite tend vers a d'après la première condition. Mais la seconde condition implique que $f(x_n)$ ne tend pas vers l. Contradiction.

On peut obtenir le même type de description pour des limites infinies ou finies en l'infini ou en un point de $\mathbb{R}$. A titre d'exemple, f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si et seulement si
$$\forall M > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x \geqslant B \implies f(x) \geqslant M.$$

3 Continuité

Définition V.53: Continuité

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit a dans I.
On dit que f *est continue en* a si f tend vers $f(a)$ en a.

Remarque. Puisque $a \in I$, la limite de $f(x)$ ne peut être que $f(a)$. Ainsi, f est continue en a si et seulement si $f(x)$ a une limite lorsque x tend vers a.

Définition V.54: Continuité sur Intervalle

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$. La fonction f est dite *continue sur* I si elle est continue en tout point de I.

Les théorèmes V.48, V.50 impliquent facilement le résultat suivant.

Théorème V.55. Opérations sur les fonctions continues

La somme, les combinaisons linéaires, le produit, le quotient, la composé de fonctions continues sont continus.

Le théorème V.55 permet de démontrer des continuités si on en connait. Mise à part la partie entière, toutes les fonctions usuelles vues dans le chapitre du même titre sont continues sur leur intervale de définition.

Exemple 5. Le théorème V.55 permet par exemple de démontrer que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{|\sin(x^2 + 4x)|} \exp(2x - 3)$ est continue sachant que $|\ |$, $\sqrt{\ }$, sin et $x \mapsto x$, $x \mapsto 1$ et exp le sont toutes.

Voyons maintenant un exemple de fonction non continue.

Exemple 6. La fonction partie entière $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $x \longmapsto E(x)$ est continue en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si $a \notin \mathbb{Z}$.

4 Théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème suivant est la principale propriété des fonctions continues. Il dit que le graphe d'une fonction continue ne peut passer de dessous à dessus une droite sans la couper.

Théorème V.56. TVI

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un intervalle I. Soit $a < b$ dans I. Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$$

ou

$$f(b) \leqslant y \leqslant f(a).$$

Alors, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Avant d'écrire la démonstration, nous remarquons que l'énoncé est faux sur les nombres rationnels. En effet, la fonction $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \longmapsto x^2$ est continue, vaut 0 en 0, 4 en 2. Pour autant il n'existe pas de nombre rationnel $x \in [0; 2]$ tel que $f(x) = 2$.
Cette remarque nous montre en particulier qu'il faut utiliser dans la démonstration une propriété de $\mathbb{R}$ qui n'est pas satisfaite par $\mathbb{Q}$: cette propriété sera la propriété de la borne supérieure.

Preuve

On suppose que $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$. On peut toujours se ramener à ce cas quitte à considérer $-f$.
Considérons l'ensemble

$$E = \{x \in [a; b] \; : \; f(x) \leqslant y\}.$$

L'ensemble E est non vide car il contient a. Il est majoré car inclus dans $[a; b]$. Posons

$$c := \sup(E).$$

Alors $c \in [a; b]$. Il existe une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E qui tend vers c. Comme f est continue en c, on en déduit que $f(U_n)$ tend vers $f(c)$. Or, $f(U_n) \leqslant y$ pour tout n. Donc, par passage à la limite dans l'inégalité, on obtient $f(c) \leqslant y$.

Si $c = b$, on a $f(c) = f(b) \geqslant y$. Donc $f(c) = y$. CQFD.

Supposons à présent que $c < b$. Il existe N tel que $(c+\frac{1}{n}) \in]c, b]$ pour tout $n \geqslant N$. Alors, $(c+\frac{1}{n}) \notin E$ car c est le sup ! En particulier, $f(c + \frac{1}{n}) > y$. En passant à la limite lorsque n tend vers l'infini dans cette inégalité, on obtient $f(c) \geqslant y$. Finalement, $f(c) = y$. CQFD.

Remarque. Il est important que la fonction soit définie sur un intervalle. En effet, la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue, change de signe mais ne s'annule pas ! !

Corollaire V.57

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Preuve

Soit I un intervalle contenu dans l'ensemble de définition de f. Posons $a = \inf f(I)$ et $b = \sup f(I)$. Le théorème des valeurs intermédiaires permet de montrer aisément que $]a; b[\subset f(I) \subset [a; b]$. Le corollaire en découle.

5 Continuité, monotonie et injectivité

Théorème V.58

Soit f une fonction définie sur un intervalle. Si f est continue et injective alors f est strictement monotone.

Preuve

C'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires. On laisse la démonstration en exercice.

Théorème V.59. Continuité de la réciproque

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, continue et injective. On pose $J = f(I)$.
Alors, la fonction réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue.

Preuve

D'après le théorème V.58, f est monotone. Quitte à remplacer f par $-f$, on suppose que f est strictement croissante. Notons g la fonction réciproque de f.
Montrons que g est strictement croissante. Soit $y_1 < y_2$ dans J. Soit x_1 et x_2 tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Comme f est strictement croissante $x_1 < x_2$. Or $x_1 = g(y_1)$ et $x_2 = g(y_2)$. Donc g est strictement croissante.

Comme $g(J) = I$ est un intervalle, on peut conclure en appliquant le lemme V.60 ci-dessous.

Lemme V.60

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone définie sur un intervalle I. Alors se valent :

(i) f est continue ;

(ii) l'image de f est un intervalle.

Preuve

Si f est continue, le corollaire V.57 montre que l'image de f est un intervalle.
Réciproquement, supposons que l'image de f est un intervalle. Quitte à remplacer f par $-f$, on suppose que f est croissante. Soit a un élément de I. Par le théorème V.51, les limites à gauche et à droite de f en a existent. Puisque l'image de I est un intervalle, ces deux limites sont nécessairement égales. On en déduit que f est continue.

6 Fonctions continues sur un intervalle fermé borné

Théorème V.61. Continue sur fermé borné

Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $I = [a; b]$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors, f est bornée et atteint ses bornes.

Remarque. Attention, la forme de l'intervalle est importante ici. L'énoncé est en effet faux sur les intervalles $[a; b[$ ou $[a, +\infty[$ par exemple. Vous pourrez chercher des contre-exemples.

Preuve

Posons
$$M = \sup f([a; b]) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$
Il s'agit de montrer que M est fini et appartient à l'image de f.
Il existe une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a; b]^{\mathbb{N}}$ telle que $f(U_n)$ tend vers M. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite $U_{\varphi(n)}$ de U_n qui converge dans $[a; b]$. Notons x la limite de $U_{\varphi(n)}$. La suite $f(U_{\varphi(n)})$ tend vers M. Puisque f est continue en x, $f(U_{\varphi(n)})$ tend vers $f(x)$. Par unicité de la limite, $f(x) = M$. En particulier, M est fini et dans l'image de f.
On raisonne de même avec l'inf. On peut aussi remarquer que $\inf f([a; b]) = -\sup -f([a; b])$.

7 Prolongement par continuité

Proposition V.62

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a; +\infty[\cup \{+\infty\}$. Soit $f :]a; b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l.$$
On définit la fonction
$$\begin{array}{rccl} g : & [a; b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \begin{cases} f(x) & \text{si } x > a \\ l & \text{si } x = a \end{cases} \end{array}$$
Alors, la fonction g est continue en a.

La preuve est évidente. On dit que g est obtenue à partir de f par prolongement par continuité. Dans le même ordre d'idée, on a l'énoncé suivant.

Proposition V.63

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et a un point dans l'intérieur de I. On suppose que

(i) la fonction $f_{|I\cap]-\infty;a[}$ tend vers $f(a)$ en a ;

(ii) la fonction $f_{|I\cap]a;+\infty[}$ tend vers $f(a)$ en a.

Alors f est continue en a.

Cette proposition est particulièrement utile lorsque f est définie par deux formules différentes à gauche et à droite de a. Par exemple, la fonction
$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$$
est continue en 0 (et même sur $\mathbb{R}$).

Quelques bonnes pratiques de rédaction des mathématiques

(i) Toute lettre désignant un objet mathématique $x, y, f, a, A\dots$ doit être introduite soit

  (a) Par l'énoncé

  (b) Par un *Soit*. Exemple : Soit x un nombre réel positif.

  (c) Soit par une phrase comme *On cherche x dans $\mathbb{R}$ tel que.*

(ii) Une égalité ou une inégalité doit être introduite logiquement soit par

  (a) un *si et seulement si*

  (b) un *donc, alors. . .*

  (c) plus rarement un *dès que* $\Leftarrow$

  (d) on une phase du type *On cherche x dans $\mathbb{R}$ tel que*

(iii) Utilisation de Soit.

`Soit + une variable + dans un ensemble + éventuellement une condition.`

Exemples : Soit $n \in \mathbb{N}$ ou soit z un nombre complexe non nul ou encore soit x un nombre réel tel que $x^2 + 1 \geqslant 0$.

(iv) Soyez attentif au type des objets dans les formules. Exemples :

— $x = y$: il faut que x et y soient deux éléments d'un même ensemble pour que cela ait un sens.

— $A \subset B$: il faut que A et B soient deux parties d'un même ensemble.

— $x \in A$: Deux cas si Soit devant A est un ensemble connu. Si pas soit devant x est un élément d'un ensemble dont A est une partie.

— $x \geqslant y$: x et y doivent être des nombres réels.

— $f(x)$: f doit une fonction ou une application définie sur un ensemble E dont x est un élément.