Université Claude Bernard Lyon 1 — UE Analyse 1 pour les mathématiciens
Semestre d'automne 2023-2024

Examen 2 – Durée 60 min – le mardi 21 novembre 2023

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
BIEN INDIQUER SON NUMÉRO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE (A, B . . . G)
L'énoncé comporte quatre exercices.

Exercice 1. Questions préparées.

1. Soit $l \in \mathbb{R}$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Donner la définition de « $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l ».
2. Donner un exemple de suite bornée divergente.
   Aucune justification n'est exigée pour cette question.

Exercice 2. Partie entière et application.

Soit x un réel.

1. Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a
$$t - 1 \leq E(t) \leq t.$$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \frac{E(x)+E(2x)+\cdots+E(nx)}{n^2}$. Donner un encadrement simple de $n^2 u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 3. Sur la suite de Héron.

Soit $a > 0$. On fixe $u_0 > 0$ et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}.$$
2. Montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq \sqrt{a}$.
3. Montrer que la suite $(u_n^2 - a)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (on démarre à $n = 1$ ici) est décroissante.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (on démarre à $n = 1$ ici) est décroissante.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\sqrt{a}$.
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$u_{n+1} - \sqrt{a} \leq (u_n - \sqrt{a})^2 \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$
   Indication : on pourra commencer par factoriser les deux membres de l'égalité de la question 1 en faisant apparaître les termes $u_{n+1} - \sqrt{a}$ et $u_n - \sqrt{a}$.

Exercice 4. Arctangentes.

Soit f, g et h les fonctions de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) \qquad g(x) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) \qquad h(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

1. Calculer les dérivées de f, g et h.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $f(x) = g(x) - h(x)$.