Université Claude Bernard Lyon 1 — UE Analyse 1 pour les mathématiciens
Semestre d'automne 2022-2023

Examen Blanc 2 – Durée 60 min – le mardi 22 novembre 2022

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
BIEN INDIQUER SON NUMÉRO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE (A, B ... G)
L'énoncé comporte trois exercices.

Exercice 1. Une inéquation à résoudre.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante
$$x - 1 \leq \sqrt{x+2}.$$

Exercice 2. Arctangente et Arccos

On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

1. Quelle est la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$? Vers $-\infty$?
2. Calculer la dérivée de g et dresser son tableau de variation.
3. Justifier que la fonction
$$f \,:\, x \longmapsto \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$
est définie sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer la dérivée f' de f sur $]0;+\infty[$.
5. En déduire que
$$\forall x \in]0;+\infty[\qquad 2\arctan(x) - \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 0.$$
6. Puis résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation
$$\arctan(x) = \frac{\pi}{12}.$$
7. Montrer que
$$\forall x \in]-\infty;0[\qquad \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = -2\arctan(x).$$

Exercice 3. Deux suites valent mieux qu'une.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \geq 0$ par :
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$
On rappelle que $0! = 1$.

1. Montrer, par récurrence, que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$.
2. En déduire que (u_n) est majorée par 3, puis qu'elle converge vers une limite $\ell \leq 3$.
3. Montrer que la suite (v_{2n}) est décroissante et que la suite (v_{2n+1}) est croissante.
4. Justifier que pour tout n, on a $0 \leq v_{2n+1} \leq v_{2n} \leq 3$.
5. En déduire que les suite (v_{2n}) et (v_{2n+1}) sont convergentes, et qu'elles admettent la même limite.
6. Que peut-on dire de la limite de la suite (v_n) ?