Université Claude Bernard Lyon 1 — UE Analyse 1 pour les mathématiciens
Semestre d'automne 2023-2024

Corrigé du CC2 – Durée 60 min – le mardi 21 novembre 2023

Exercice 1. Questions préparées.

1. Soit $l \in \mathbb{R}$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Donner la définition de « $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l ».
2. Donner un exemple de suite bornée divergente.
   Aucune justification n'est exigée pour cette question.

Corrigé : Pour le première question voir le cours. Pout la deuxième, $U_n = (-1)^n$ est un exemple de suite bornée divergente.

Exercice 2. Partie entière et application.

Soit x un réel.

1. Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a
$$t - 1 \leq E(t) \leq t.$$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \frac{E(x)+E(2x)+\cdots+E(nx)}{n^2}$. Donner un encadrement simple de $n^2 \times u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.

Corrigé :

1. Pour tout réel t, $E(t)$ est le plus grand entier plus petit que $E(t)$. Donc $E(t) + 1 \geq t$ et $E(t) \leq t$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Avec $t - 1 \leq E(t) \leq t$ on a, pour tout k entre 1 et n, $kx - 1 \leq E(kx) \leq kx$.
$$\sum_{k=1}^{n}(kx-1) \leq \sum_{k=1}^{n} E(kx) \leq \sum_{k=1}^{n} kx$$
   Or :
$$\sum_{k=1}^{n} kx = x\sum_{k=1}^{n} k = x\frac{n(n+1)}{2}$$
   et
$$\sum_{k=1}^{n}(kx-1) = \left(\sum_{k=1}^{n} kx\right) - n = x\frac{n(n+1)}{2} - n.$$
   donc
$$\frac{n(n+1)}{2n^2}x - \frac{n}{n^2} \leq u_n \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}x$$
3. Comme $\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2}x - \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2}x = \frac{1}{2}x$ le théorème des gendarmes implique que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{2}x$.

Exercice 3. Sur la suite de Héron.

Soit $a > 0$. On fixe $u_0 > 0$ et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}.$$

2. Montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq \sqrt{a}$.
3. Montrer que la suite $(u_n^2 - a)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (on démarre à $n = 1$ ici) est décroissante.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (on démarre à $n = 1$ ici) est décroissante.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\sqrt{a}$.
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_{n+1} - \sqrt{a} \leq (u_n - \sqrt{a})^2 \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Indication : on pourra commencer par factoriser les deux membres de l'égalité de la question 1 en faisant apparaître les termes $u_{n+1} - \sqrt{a}$ et $u_n - \sqrt{a}$.

Corrigé

1. Soit $n \geq 0$.

$$u_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}\frac{(u_n^2 + a)^2}{u_n^2} - a = \frac{1}{4u_n^2}(u_n^2 + 2au_n + a^2 - 4au_n^2) = \frac{1}{4u_n^2}(u_n^2 - 2au_n + a^2) = \frac{1}{4u_n^2}(u_n^2 - a)^2.$$

2. On va d'abord montrer que, pour tout $n \geq 0$, $u_n > 0$.
Par hypothèse $u_0 > 0$.
Soit $n \geq 0$ tel que $u_n > 0$. Alors, avec $a > 0$, on en déduit que $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) > 0$.
Donc, par récurrence $u_n > 0$ pour tout $n \geq 0$.

On a vu en haut que $u_{n+1}^2 - a$ est un carré : c'est donc positif. Donc $u_{n+1}^2 \geq a$.
Comme u_{n+1} et a sont positifs, on obtient $u_{n+1} \geq \sqrt{a}$.
3. Soit $n \geq 1$. On veut montrer que $u_{n+1}^2 - a \geq u_n^2 - a$. Si $u_n^2 - a = 0$ alors $u_{n+1}^2 - a = 0$ aussi, par le résultat de 1. Si $u_n^2 - a > 0$ alors on peut diviser et obtenir

$$0 \leq \frac{u_{n+1}^2 - a}{u_n^2 - a} = \frac{1}{4}\frac{u_n^2 - a}{u_n^2} \leq \frac{1}{4}\frac{u_n^2}{u_n^2} = \frac{1}{4} \leq 1$$

car $a > 0$. D'où $u_{n+1}^2 - a \geq u_n^2 - a$.
La suite $(u_n^2 - a)_{n \geq 1}$ est donc décroissante.
4. Soit $n \geq 1$.
$u_{n+1}^2 - a \geq u_n^2 - a$ implique $u_{n+1}^2 \geq u_n^2$ et comme les u_n sont positifs aussi $u_{n+1} \geq u_n$.
La suite (u_n) est donc décroissante.
5. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante minorée. Par le théorème de Weierstrass, elle converge, disons vers ℓ, un réel supérieur ou égal à $\sqrt{a}$.
Alors ℓ satisfait l'èquation $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right)$. Donc $\ell^2 = a$. Comme ℓ est minorée par $\sqrt{a}$ on a $\ell = \sqrt{a}$.
6. Soit $n \geq 1$.
On a

$$(u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a}) = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2(u_n + \sqrt{a})^2}{4u_n^2}$$

d'où

$$(u_{n+1} - \sqrt{a}) = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2(u_n + \sqrt{a})^2}{(u_{n+1} + \sqrt{a})4u_n^2} \leq \frac{(u_n - \sqrt{a})^2(u_n + u_n)^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{a})4u_n^2} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$$

Exercice 4. Arctangentes.

Soit f, g et h les fonctions de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) \qquad g(x) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) \qquad h(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

1. Calculer les dérivées de f, g et h.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $f(x) = g(x) - h(x)$.

Corrigé :

1. Soit j une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$. Alors, pour tout $x > 0$, on a :

$$\big(\arctan j(x)\big)' = \frac{j'(x)}{1 + j(x)^2}$$

D'où, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{-2x^{-3}}{2(1 + \frac{1}{4}x^{-4})} = -\frac{4x}{(4x^4 + 1)}$$

$$g'(x) = \frac{(x+1)^{-2}}{1 + \frac{x^2}{(x+1)^2}} = \frac{1}{(x+1)^2 + x^2}$$

$$h'(x) = \frac{x^{-2}}{1 + \frac{(x-1)^2}{x^2}} = \frac{1}{(x-1)^2 + x^2}$$

2. Soit $x > 0$.

$$g'(x) - h'(x) = \frac{(x-1)^2 + x^2 - (x+1)^2 - x^2}{((x-1)^2 + x^2)((x+1)^2 + x^2)} = \frac{-4x}{(2x^2 + 1 - 2x)(2x^2 + 1 + 2x)} = f'(x)$$

$g - h - f$ est alors une primitive pour la fonction 0.
D'où il existe une constante C telle que pour tout $x > 0$: $g(x) - h(x) - f(x) = C$.
On évalue en $x = 1$ pour trouver $C = \arctan(\frac{1}{2}) - \arctan(0) - \arctan(\frac{1}{2}) = 0$.
Remarque : On pouvait aussi déterminer C en étudiant la limite en $+\infty$ de $g - h - f$.