Correction du CC du 3 octobre 2023

Exercice 1. Calculs avec des réels.
Simplifier et calculer les expressions suivantes :

1. $A = \frac{36^2\,8}{4^3\,6^3}$.
2. $B = \sqrt{\frac{3}{5^{\frac{1}{2}}}} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}}$.

Correction
On effectue les calculs en utilisant les règles générales sur les puissances :

$$\begin{aligned} A &= \frac{36^2\,8}{4^3\,6^3} \\ &= \frac{(6^2)^2 \times 2^3}{(2^2)^3 \times 6^3} \\ &= \frac{6^4 \times 2^3}{2^6 \times 6^3} \\ &= \frac{6}{2^3} \\ &= \frac{3 \times 2}{2^3} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{\frac{3}{5^{\frac{1}{2}}}} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{3^{1/2}}{(5^{1/2})^{1/2}} \times \frac{3^{-1/3}}{2^{-1/3}} \times 5^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} \times 2^{1/3}}{5^{1/4}} \\ &= 3^{1/6} \times 5^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} \times 2^{1/3} \\ &= 3^{1/6} \times 5^{1/12} \times 2^{1/3} \end{aligned}$$

On pouvait poursuivre le calcul pour B :

$$B = (3^2)^{1/12} \times 5^{1/12} \times (2^4)^{1/12} = \left(3^2 \times 5 \times 2^4\right)^{1/12} = 720^{1/12}.$$

Exercice 2. Inégalités.

1. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient :
$$x^2 - 4x - 21 \leq 0.$$
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in [-5; 4] \times [-6, 3]$ on a
$$-24 \leq xy \leq 30.$$

Correction

1. On étudie le signe du trinôme $x^2 - 4x - 21$: pour cela, on calcule son discriminant Δ, puis ses racines éventuelles. On a
$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-21) = 16 + 84 = 100 = 10^2.$$
Le discriminant est strictement positif, donc le trinôme admet 2 racines réelles distinctes x_1 et x_2 et on a :
$$x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{4 - 10}{2} = -3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{4 + 10}{2} = 7.$$
Un trinôme est du signe de son coefficient de degré 2 en dehors de l'intervalle formé par ses racines, et du signe opposé sur l'intervalle formé par ses racines. Nous pouvons donc affirmer que l'ensemble des réels x solutions de l'inéquation $x^2 - 4x - 21 \leq 0$ est l'intervalle $[-3, 7]$.
Remarque : Il était bien sûr possible de remarquer que pour tout réel x, on a $x^2 - 4x - 21 = (x + 3) \times (x - 7)$ et de réaliser un tableau de signes.

2. On raisonne par disjonction de cas, suivant le signe de x.

1er cas. Soit $x \in [0,4]$.

Pour tout $y \in [-6,3]$, on a : $-6 \leq y \leq 3$.

Or x est positif, donc on en déduit $-6x \leq xy \leq 3x$.

Puis $x \leq 4$ donc $-6x \geq -24$ et $3x \leq 12 \leq 30$.

Pour tout $x \in [0,4]$ et tout $y \in [-6,3]$, on a donc :

$$-24 \leq xy \leq 30.$$

2ème cas. Soit $x \in [-5,0[$.

Pour tout $y \in [-6,3]$, on a : $-6 \leq y \leq 3$.

Or x est négatif, donc on en déduit $-6x \geq xy \geq 3x$.

Puis $x \geq -5$, donc $-6x \leq 30$ et $3x \geq -15 \geq -24$.

Pour tout $x \in [-5,0[$ et tout $y \in [-6,3]$, on a donc :

$$-24 \leq xy \leq 30.$$

On peut donc conclure que pour tout $x \in [-5,4]$ et tout $y \in [-6,3]$, on a

$$-24 \leq xy \leq 30.$$

Remarque : Il était possible de faire 4 cas (en distinguant suivant les signes de x et de y), ou d'expliquer clairement que les extremums sont atteints au niveau des bornes, et de calculer les QUATRE produits des bornes.

Exercice 3. Inégalités et valeurs absolues.

Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient :

$$|x+2| + |x+6| = 7$$

puis

$$|x+2| + |x+6| \leq 7.$$

Correction

Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x+2| + |x+6|$.

On raisonne par disjonction de cas, suivant les signes de $(x+2)$ et de $(x+6)$:

1er cas. Soit $x \in]-\infty, -6]$.

Alors $|x+2| = -x-2$ et $|x+6| = -x-6$.

Donc $f(x) = -2x-8$.

Résolvons, sur cet intervalle, l'équation $f(x) = 7$. Cela équivaut à $-2x-8 = 7$, donc à $-2x = 15$. On obtient donc comme unique solution $x = -15/2 = -7,5$. On vérifie que $-7,5$ appartient à l'intervalle $]-\infty, -6]$.

Donc $\{-7,5\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 7$ sur l'intervalle $]-\infty, -6]$.

2ème cas. Soit $x \in]-6, -2[$.

Alors $|x+2| = -x-2$ et $|x+6| = x+6$.

Donc $f(x) = -x-2+x+6 = 4$.

L'équation $f(x) = 7$ n'admet donc pas de solution sur l'intervalle $]-6, -2[$: l'ensemble des solutions de $f(x) = 7$ sur cet intervalle est vide.

3ème cas. Soit $x \in [-2, +\infty[$.

Alors $|x+2| = x+2$ et $|x+6| = x+6$.

Donc $f(x) = 2x+8$.

Résolvons, sur cet intervalle, l'équation $f(x) = 7$. Cela équivaut à $2x+8 = 7$, donc à $2x = -1$. On obtient donc comme unique solution $x = -1/2 = -0,5$. On vérifie que $-0,5$ appartient à l'intervalle $[-2, +\infty[$.

Donc $\{-0,5\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 7$ sur l'intervalle $[-2, +\infty[$.

Conclusion : L'ensemble des réels x solutions de $|x+2|+|x+6|=7$ est la réunion des 3 ensembles obtenus, donc c'est l'ensemble $\{-7,5;-0,5\}$.

Résolvons maintenant l'inéquation $|x+2|+|x+6| \leq 7$.
On reprend les mêmes cas, un peu plus rapidement puisqu'on a déjà donné les différentes expressions de f sur chacun des intervalles.

1er cas. Soit $x \in]-\infty,-6]$.
Alors $f(x)=-2x-8$, et

$$\begin{aligned} f(x) \leq 7 &\iff -2x-8 \leq 7 \\ &\iff -2x \leq 15 \\ &\iff x \geq -7,5 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de $f(x) \leq 7$ sur $]-\infty,-6]$ est donc l'intervalle $[-7,5;-6]$.

2ème cas. Soit $x \in]-6,-2[$.
Alors $f(x)=4$. Donc l'inéquation $f(x) \leq 7$ est vérifiée pour tout x de $]-6,-2[$.
Donc l'ensemble des solutions de $f(x) \leq 7$ sur $]-6,-2[$ est l'intervalle $]-6,-2[$.

3ème cas. Soit $x \in [-2,+\infty[$.
Alors $f(x)=2x+8$, donc

$$\begin{aligned} f(x) \leq 7 &\iff 2x+8 \leq 7 \\ x \leq -0,5. \end{aligned}$$

L'ensemble des réels de $[-2,+\infty[$ solutions de $f(x) \leq 7$ est donc $[-2;-0,5]$.

Conclusion : L'ensemble des réels x solutions de $|x+2|+|x+6| \leq 7$ est la réunion des 3 ensembles obtenus, donc c'est l'intervalle $[-7,5;-0,5]$.

Exercice 4. Inégalités et fractions.

Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que les deux membres de l'inégalité suivante soient bien définis et l'inégalité soit satisfaite :

$$\frac{1}{x-1} \leq \frac{x+2}{x+1}. \tag{0.1}$$

Correction
Les deux membres de l'inéquation sont définis si et seulement si x est différent de 1 et de -1. Ils sont définis sur l'ensemble $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.
Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} \leq \frac{x+2}{x+1} &\iff \frac{x+2}{x+1} - \frac{1}{x-1} \geq 0 \\ &\iff \frac{(x+2)\times(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)} \geq 0 \\ &\iff \frac{x^2-x+2x-2-x-1}{(x+1)(x-1)} \geq 0 \\ &\iff \frac{x^2-3}{(x+1)(x-1)} \geq 0 \end{aligned}$$

On réalise un tableau de signe : le numérateur s'annule et change de signe en $-\sqrt{3}$ et en $+\sqrt{3}$. Le dénominateur s'annule et change de signe en -1 et en $+1$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		$+1$		$+\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2-3		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(x+1)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x^2-3}{(x-1)(x+1)}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Donc l'ensemble des réels x solutions de $\dfrac{1}{x-1} \leq \dfrac{x+2}{x+1}$ est $]-\infty, -\sqrt{3}] \cup]-1, 1[\cup [\sqrt{3}, +\infty[$.

Exercice 5. Question de cours.
Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow J$ une fonction. Donner la définition de f est injective.

Correction
Par définition, une fonction $f : I \to J$ est injective si « pour tous x et x' dans I, $f(x) = f(x')$ implique $x = x'$ », ce qui s'écrit :

$$\forall (x, x') \in I^2, f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$$

.
Ou : Une fonction $f : I \to J$ est injective si « pour tous x et x' dans I, $x \neq x'$ implique $f(x) \neq f(x')$ », ce qui s'écrit :

$$\forall (x, x') \in I^2, x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$$

Remarque : pour toute fonction f, si $x = x'$, alors on a $f(x) = f(x')$, et si $f(x) \neq f(x')$ alors $x \neq x'$. Dans la définition de l'injectivité, on peut donc remplacer « implique » par « si et seulement si ».

Quelques rappels d'orthographe :

- Je résous, On résout, Résolvons.
- Quel que soit le réel, quelle que soit la fonction, Quels que soient les réels...
- Je calcule, on calcule. Un calcul.
- Un intervalle.