Correction Feuille 4 : Limites et continuité des fonctions

Exercice 1 (Une fonction définie par morceaux)**.** Soit $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq -1 \\ x^2+1 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \sin(x/4) & \text{si } x > 0. \end{cases}$

1. Dessiner le graphe de f.

2. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to -1-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$ e) $\lim\limits_{x\to \pi-} f(x)$
b) $\lim\limits_{x\to -1+} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to \pi+} f(x)$

3. Est-ce que les limites suivantes existent ? Si oui, donner leur valeur.

a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to \pi} f(x)$

Correction

Par définition de f, on a :

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (-2x) = 2\,, \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^2+1) = 2\,.$$

De façon analogue, on a :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2+1) = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sin(x/4) = 0$$
$$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{x\to \pi^-} \sin(x/4) = \sqrt{2}/2\,, \qquad \lim_{x\to \pi^+} f(x) = \lim_{x\to \pi^+} \sin(x/4) = \sqrt{2}/2\,.$$

On en déduit que les limites (a) et (c) existent, et elles valent respectivement 2 et $\sqrt{2}/2$, tandis que la limite (b) n'existe pas.

Exercice 2 (Limites)**.** Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x+5}{x-4}$
4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^9-17}{x^7}$ 5) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^3-5x^2+7}{8+2x-5x^3}$ 6) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+3}{x^3+2}$
7) $\lim\limits_{x\to 1} |x-1|$ 8) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{|x-1|}$ 9) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1}{|x-1|}$
10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+x}-1}$ 11) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^2}\right)$ 12) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x+5} - x$
13) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$ 14) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(\dfrac{1}{x})$ 15) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+\sin x}{x^2+\cos x}$
16) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$ 17) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1+2\sin(x)}{1+\sqrt{x}}$ 18) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{x-\sin x}$

Correction

1. On a $x^2-4 = (x-2)(x+2)$, d'où

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4\,.$$

2. Décomposer $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ et $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$ et simplifier pour trouver 3/2.
3. La limite n'existe pas : étudier la limite quand $x \to 4^-$ et $x \to 4^+$.

4. La limite vaut $+\infty$ (comparer les puissances les plus élévées au numérateur et au dénominateur).
5. Comme le précédent : la limite vaut $-3/5$.
6. Encore comme le précédent. La limite vaut 0.
7. 0.
8. $+\infty$.
9. $1/4$.
10. En multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{1+x}+1$, on trouve que
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}-1} = \frac{\sqrt{1+x}+1}{(1+x)-1} = \frac{\sqrt{1+x}+1}{x},$$
d'où on trouve que la limite n'existe pas ($x \to 0^+$ et $x \to 0^-$).
11. On a
$$\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} = \frac{x}{(1-x)(1+x)},$$
d'où c'est simple à voir que la limite n'existe pas.
12. On a
$$\sqrt{x^2+2x+5}-x = \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+2x+5}+x} = \frac{2x+5}{x\left(\sqrt{1+(2/x)+(5/x^2)}+1\right)} \longrightarrow_{x\to+\infty} 1\,.$$
13. 0.
14. 0.
15. Il faut mettre en facteur, au numérateur et au dénominateur, les quantités qui convergent à l'infini plus rapidement que les autres. On trouve donc que la limite vaut 1.
16. On écrit
$$x^x = e^{x\ln x} \longrightarrow_{x\to 0^+} e^0 = 1\,.$$
(si on a oublié la limite de $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} x\ln x$, on peut le retrouver à partir de $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\ln x}{x}$ avec un changement de variable $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ qui donne $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} x\ln x = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\ln 1/x}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$)
17. 0.
18. $+\infty$.

Exercice 3 (Limites et taux d'accroissement)**.** Rappelons que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et que $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}$	2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}$	3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$
4) $\lim\limits_{x\to 1/2} \frac{\cos(\pi x)}{1-2x}$	5) $\lim\limits_{x\to 1/2} (2x^2+x-1)\tan(\pi x)$	6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$
7) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}$	8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln^3 x$	9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\exp(\ln^2 x)}{x^n}$, $n\in\mathbb{Z}$

<u>**Correction**</u>

1. On a
$$\frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}} = \frac{\sin(2x)}{2x}2\sqrt{x} \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } x\to 0.$$
2. Du moment que $\sin x/x \to 1$ quand $x\to 0$ et que $x\sin(1/x) \to 0$, on a que la deuxième limite vaut 0.

3. Par définition de la fonction tan, on a

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x \cos x} \qquad \text{avec} \ \cos(0) = 1 \text{ quand } \ x \to 0.$$

4. On change la variable en posant $1-2x = y$, et donc $x = (1-y)/2$. En utilisant que $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin(\alpha)$ (faire un dessin pour le prouver), on a

$$\lim_{x\to 1/2} \frac{\cos(\pi x)}{1-2x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)}{\frac{\pi}{2}y}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

5. On remarque que $\lim\limits_{x\longrightarrow 1/2} 2x^2+x-1 = 0$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 1/2} \tan(\pi x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1/2} \frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)} = +\infty$. On a une forme indéterminée que l'on va résoudre en extrayant un facteur qui tend vers 0 dans $2x^2+x-1$ et en faisant apparaitre un sin (à partir du cos, via une rotation de $\pi/2$) au dénominateur pour appliquer $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. On commence par noter que $2x^2+x-1 = (2x-1)(x+1)$. On pose alors $2x-1 = y$, d'où $x = (1+y)/2$. Grâce aux formules $\sin(\alpha+\pi/2) = \cos(\alpha)$ et $\cos(\alpha+\pi/2) = -\sin(\alpha)$, on trouve alors

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1/2} (2x^2+x-1)\tan(\pi x) &= \lim_{y\to 0} y\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}y\right)\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}y\right)} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{y}{2}(3+y)\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\pi}{2}y}{\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)}\frac{-(3+y)}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) = -\frac{3}{\pi}.
\end{aligned}$$

6. On peut écrire

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{\cos^2 x - 1}{x^2\,(1+\cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{-1}{1+\cos x} \longrightarrow -\frac{1}{2} \qquad \text{quand } \ x\to 0.$$

7. Quand $x \to 0$, on a

$$\frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,\frac{x^2}{\sin^2 x} \longrightarrow 1.$$

8. La limite vaut 0 par croissances comparées.
9. On a $x^n = \exp(n\ln x)$, d'où on trouve

$$\frac{\exp(\ln^2 x)}{x^n} = \exp\big(\ln x\big(\ln x - n\big)\big)\,.$$

On en déduit que la limite vaut $+\infty$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4 (Partie entière)**.**

Dans cet exercice, la notation $E(x)$ désigne la partie entière d'un réel x. Calculer :

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} E(x+1)$
2. $\lim\limits_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} xE\left(\frac{1}{x}\right)$

<u>**Correction**</u>

1. Comme la fonction partie entière est continue à droite au point 1, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} E(x+1) = E(1) = 1$.
2. Pour tout $x > 0$ on a $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$, et donc $1 - x < xE\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$. Comme $\lim\limits_{x\to 0}(1-x) = 1$, par théorème des gendarmes on déduit que $\lim\limits_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

3. On commence par étudier la continuité en 0. Si $x > 0$, par définition de partie entière on a $E(1/x) \leq 1/x < E(1/x) + 1$, qui implique que
$$0 \leq xE(1/x) \leq 1 < xE(1/x) + x \leq 1 + x.$$
Par le théorème des gendarmes, on trouve alors que $xE(1/x) \to 1$ pour $x \to 0^+$. La même inégalité de départ montre, en inversant les signes d'inégalité quand on multiplie par x, que aussi la limite pour $x \to 0^-$ vaut 1. Donc la fonction est continue en 0.
Après, on remarque que pour tout $x > 1$ on a $E(1/x) = 0$, ce qui implique que $f(x) = 0$ pour tout $x > 1$. Alors on a $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$. En revanche, quand $x \to 1^-$ on a $E(1/x) = 1$, d'où on déduit que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$. Donc, f n'est pas continue en 1, mais continue à droite. Le même argument montre que les points $1/n$, avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sont des points de discontinuité et continuité à droite pour f.
Enfin, la continuité de f pour les $x < 0$ peut être déduite du discours précédent, en utilisant que, pour tout $x > 0$, on a $E(-x) = -E(x) - 1$.

Exercice 5 (Une limite à partir d'une autre)**.**
1) Si $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x) - 5}{x - 2} = 5$, trouver $\lim_{x\to 2} f(x)$. 2) Si $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = -2$, trouver $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

Correction

La première limite vaut 5, la deuxième vaut 0. Pour le voir, on peut :

— soit raisonner par l'absurde : si le numérateur ne tend pas à 0, la limite ne peut pas être finie (car le dénominateur tend à 0) ;

— soit utiliser la définition de limite.

Exercice 6 (Continuité à droite et à gauche)**.** Étudier la continuité à gauche, la continuité à droite et la continuité des fonctions suivantes en chaque point de leur domaine de définition.

1. $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

Correction

1. Pour tout $x \in]0, 1[$, $f(x) = x^2$ coïncide avec une fonction continue, donc elle est continue en tout point de $]0, 1[$; le même argument s'applique à tout point dans $]1, 2[$. En plus, pour la même raison on a que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0 = f(0)$, donc f est continue à droite en 0 ; de façon pareil, on voit que f est continue à gauche en 2. Finalement, on a
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1 = \lim_{x\to 1^+} (2x - 1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \qquad \text{et} \qquad f(1) = 1\,,$$
donc f est continue aussi en 1.
2. Le même argument de l'exercice précédent montre que f est continue en tout point $x \neq 0$. Considérons maintenant le cas $x = 0$. On rappelle que $\sqrt{x^2} = |x|$. Donc
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x + 1) = 1, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x - 1) = -1\,.$$
On en déduit que f n'est pas continue en 0, mais continue à droite.

Exercice 7 (Limites et continuité)**.** 1. Déterminer les valeurs de $k \in \mathbb{R}$ pour lesquelles f_k définie par $f_k(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ k - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ est une fonction continue.

2. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \dfrac{1+x^3}{1+x}$. Trouver une application continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g|_{\mathbb{R}\setminus\{-1\}} = f$

<u>**Correction**</u>

1. Pour $x \neq 2$, la fonction est clairement continue, il faut donc juste choisir le k de manière que les deux termes coïncident à $x = 2$, c'est-à-dire $2^2 = k - 2^2$ ou bien $k = 8$. La seule valeur k telle que f_k est une fonction continue vaut donc 8.
2. Comme $1 + x^3 = (1+x)(1-x+x^2)$, la fonction $g(x) = x^2 - x + 1$ est continue et coïncide avec f pour $x \neq -1$.

Exercice 8 (Nombre de solutions d'une équation)**.** Montrer que l'équation $x^3 - 15x + 1 = 0$ a trois solutions dans l'intervalle $[-4, 4]$.

<u>**Correction**</u> On calcule les valeurs de polynômes sur les bords de l'intervalle et pour des arguments simples :
Pour $x = -4$, on obtient $x^3 - 15x + 1 = 16x - 15x + 1 = x + 1 = -3 < 0$.
Pour $x = 0$, on obtient $1 > 0$.
Pour $x = 1$, on obtient $x^3 - 15x + 1 = 1 - 15 + 1 < 0$.
Pour $x = 4$, on obtient $x^3 - 15x + 1 = 16x - 15x + 1 = x + 1 = 5 > 0$

Par la continuité de polynôme et le théorème des valeurs intermédiaires, il y a donc une solution dans $]-4, 0[$, une solution dans $]0, 1[$ et une solution dans $]1, 4[$, donc au moins 3 solutions. Pour être rigoureux, si on interprête le « trois solutions » de l'énoncé comme « exactement trois », il faut ajouter que c'est une équation du troisième degré qui a donc au plus trois racines.

Exercice 9 (Solution d'une équation)**.** Montrer qu'il existe $x \in [3\pi/4, \pi]$ tel que

$$\tan x + \frac{x}{3} = 0.$$

<u>**Correction**</u> On évalue l'expression à $x = 3\pi/4$ et à $x = \pi$ et on trouve $-1/4 < 0$ et $\pi/3 > 0$. Par la continuité de la tangente et le théorème de valeurs intermédiaires, l'expression a donc un zéro dans l'intervalle donné.

Exercice 10 (Bijection et monotonie)**.** Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la fonction $f_n : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_n(x) = x^n - x - 1$$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n > 1$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$.
3. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et converge vers une limite l.
4. Déterminer l.

<u>**Correction**</u>

1. On a $f_n(1) = -1 < 0$ et $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = \infty$ (parce que le terme dominant est positif). Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc bien $x_n > 1$ tel que $f_n(x_n) = 0$. Comme $f_n'(x) = nx^{n-1} - 1 \geq 2 - 1 = 1 > 0$, la fonction est strictement croissante. Donc, x_n est unique.
2. Par définition de x_n, on a $x_n^n = x_n + 1$. On obtient
$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n - 1 = x_n(x_n + 1) - x_n - 1 = x_n^2 - 1 > 0.$$
3. Comme $f_{n+1}(1) = -1 < 0$ et $f_{n+1}(x_n) > 0$ par le resultat précédent, on a bien $1 < x_{n+1} < x_n$ et la suite est décroissante. Comme la suite est minorée par 1, elle converge vers une limite l.
4. Comme $x_n > 1$, on sait que $l \geq 1$. Si la limite $l > 1$, on obtient la minoration divergente
$$l + 1 = \lim_{n\to\infty}(x_n + 1) = \lim_{n\to\infty} x_n^n \geq \lim_{n\to\infty} l^n$$
or, le membre gauche de l'inégalité, $l + 1$, est fini, donc $\lim\limits_{n\to\infty} l^n \neq \infty$
On conclut que $l = 1$.

Exercice 11 (Une fonction lipschtizienne)**.**

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et f une application de $[a, b]$ vers $[a, b]$.

1. On suppose que pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ on a
$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$
Montrer que f est continue. En déduire qu'il existe au moins un réel $u \in [a, b]$ tel que $f(u) = u$. On pourra utiliser la fonction g de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$.
2. On suppose maintenant que pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ avec $x \neq y$ on a
$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$
Montrer qu'il existe un unique $u \in [a, b]$ tel que $f(u) = u$.

<u>**Correction**</u>

1. Montrons que
$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |x_0 - x| \leq \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| \leq \varepsilon$$
Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \varepsilon$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x_0 - x| \leq \delta$. Alors, par définition de δ, $|x_0 - x| \leq \varepsilon$. Par hypothèse, $|f(x_0) - f(x)| \leq |x_0 - x|$ donc $|f(x_0) - f(x)| \leq \varepsilon$, ce qui conclue la preuve.
On pose maintenant $g(x) = f(x) - x$. Comme f est continue, g l'est aussi. On sait que $a \leq f(a) \leq b$ donc $0 \leq g(a) = f(a) - a \leq b - a$ et $0 \leq g(b) = f(b) - b \leq 0$. Par théorème des valeurs intermédiaires, $\exists u \in [a, b], g(u) = 0$, c-à-d $f(u) = u$.
2. Pour $x = y$, $|f(x) = f(y)| = 0 = |x - y|$ donc l'hypothèse est strictement plus forte que la précédente, la preuve de continuité et de l'existence de u est toujours valable.
Il reste à montrer que u est unique, c'est à dire $\forall u' \in [a, b], f(u') = u' \Rightarrow u' = u$. Soit $u' \in [a, b], f(u') = u'$. Par hypothèse, $u \neq u' \Rightarrow |f(u') - f(u)| < |u' - u|$, or par définition de u et u', $|f(u') - f(u)| = |u' - u|$, donc $u = u'$.

Exercice 12 (Surjection)**.** Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors f est surjective.

<u>**Correction**</u> Soit $y \in \mathbb{R}$. Par la limite vers $-\infty$, il existe forcement une valeur $a \in \mathbb{R}$ telle que $a < 0$ et $f(a) < y$. Par la limite vers ∞, il existe forcement une valeur $b \in \mathbb{R}$ telle que $b > 0$ et $f(b) > y$.

Par la continuité de f et le théorème de valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = y$. Comme y était un réel arbitraire, la fonction f est bien surjective.

Exercice 13 (Image d'un intervalle. Vrai ou faux ?)**.** Vrai ou faux ?

1. Si f est continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$, alors $f([a, b])$ est un intervalle fermé borné.
2. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert borné.
3. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert, mais pas forcément borné.
4. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle, mais pas forcément ouvert ni borné.

<u>**Correction**</u>

1. Vrai. La fonction admet un minimum et un maximum et par le théorème des valeurs intermédiaires atteint aussi tout l'intervalle $[\min, \max]$.
2. Faux. Contre-exemples : f la fonction constante qui ne donne pas un intervalle ouvert. $f(x) = 1/x$ sur $]0, 1[$ qui n'est pas bornée.
3. Faux. Contre-exemple : fonction constante.

4. Vrai. Intuitivement : La fonction atteint toutes les valeurs entre $\inf\{f(x)\}$ et $\sup\{f(x)\}$ par le théorème des valeurs intermédiares ce qui donne toujours un intervalle qui pourrait avoir des bornes $\pm\infty$ ou inclure ses bornes si la fonction admet un minimum ou maximum. Plus formellement : par définition, $f([a,b])$ est un intervalle ssi $\forall x, y \in f([a,b]), \forall m \in [x,y], m \in f([a,b))$. Soient $x, y \in f([a,b]) etm \in [x,y]$. Par théorème des valeurs intermédiaires, $\exists p \in [a,b], f(p) = m$, donc $m \in f([a,b])$.

Exercice 14 (Fonction périodique)**.**

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.
2. En utilisant le résultat précédent, calculer la limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x(\sin^8 x + \cos^{14} x)}.$$

__Correction__

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$. D'après le cours la restriction de f à l'intervalle $[0,T]$ est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc $m, M \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in [0,T]$, $m \leq f(x) \leq M$ et $x_1, x_2 \in [0,T]$ tels que $f(x_1) = m$ et $f(x_2) = M$. Il reste à montrer que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$. En définissant $k = E(x/T)$, où E désigne la fonction partie entière, on a $k \leq \dfrac{x}{T} \leq k+1$, et donc $x - kT \in [0,T]$. Mais alors, comme $f(x) = f(x - kT)$ on en déduit bien que $m \leq f(x) \leq M$.
2. Définissons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^8 x + \cos^{14} x$. f est 2π-périodique, et donc d'après la question précédente f est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M.$$
De plus on a clairement $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on a ($\sin^8 x \leq 0$ et $\cos^{14} x \geq 0$, et lorsque l'un des deux vaut 0 l'autre est non nul), et donc en particulier $m > 0$. On en déduit que pour tout $x > 0$
$$\frac{\ln x}{Mx} \leq \frac{\ln x}{x(\sin^8 x + \cos^{14} x)} \leq \frac{\ln x}{mx},$$
et donc, puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par théorème de comparaison, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x(\sin^8 x + \cos^{14} x)} = 0$ par théorème des gendarmes.

Études complètes de fonctions

Exercice 15 (Fraction rationnelle)**.**

On définit une fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$$

1. Étudier les variations de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
3. Calculer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de l'expression $f(x) - (x+2)$.
En déduire que la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote au graphe de f.
4. Déterminer la position du graphe de f par rapport à cette asymptote.
5. Tracer le graphe de f.

__Correction__

1.
$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x+1) - 1(x^2+3x+3)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 3x + 2x + 3 - x^2 - 3x - 3}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	N/A	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

2. Les limites sont : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
3. $f(x)-(x+2) = \dfrac{x^2+3x+3-x^2-x-2x-2}{x+1} = \dfrac{1}{x+1}$ dont la limite en $+/-\infty$ est 0, donc la droite $y = x+2$ est asymptote de f.
4. Pour $x < -1$, $f(x)-(x+2) < 0$ donc f est au dessous de l'asymptote. Pour $x > -1$, $f(x)-(x+2) > 0$ donc f est au dessus de l'asymptote.
5. À tracer à la main ou avec un logiciel.

Exercice 16 (Avec un logarithme)**.**
On note f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(x) = (1-x)\ln(1-x)+x$ et g la fonction définie sur $]0,1[$ par $g(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$.

1. Étudier les variations de f sur $[0,1[$ et en déduire que f est à valeurs positives.
2. Étudier les variations de g sur $]0,1[$.
3. Déterminer les limites éventuelles de $g(x)$ pour x tendant vers 0 et pour x tendant vers 1.

Correction
On note f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(x) = (1-x)\ln(1-x)+x$ et g la fonction définie sur $]0,1[$ par $g(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$.

1. On calcule la dérivée de f : soit $x \in]0,1[$. On a :
$$f'(x) = -\ln(1-x) + (1-x)\times\frac{-1}{1-x} + 1 = -\ln(1-x)$$
Donc f' est strictement positive sur $]0,1[$. On en déduit que f est strictement croissante sur $]0,1[$. On remarque que $f(0)$ est égal à 0, donc f est positive sur $[0,1[$.
2. La fonction g est continue et dérivable sur $]0,1[$, et pour tout $x \in]0,1[$, on a :
$$g'(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{-x}{1-x} - \ln(1-x)\right) = \frac{-x-(1-x)\ln(1-x)}{x^2} = -\frac{f(x)}{x^2}.$$
D'après la question 1, on peut affirmer que, pour tout x de $]0,1[$, $g'(x)$ est négative, donc g est strictement décroissante sur $]0,1[$.
3. Soit $x \in]0,1[$. On a
$$g(x) = \frac{\ln(1-x)}{x} = -\frac{\ln(1-x)-\ln(1)}{(1-x)-1}.$$
$g(x)$ représente donc l'opposé du taux d'accroissement de la fonction ln entre $1-x$ et 1, donc $\lim_{x\to0} g(x) = -\ln'(1) = -1$.
Pour la limite en 1, on utilise que $\lim_0 \dfrac{\ln t}{t} = -\infty$, donc $\lim_1 g(x) = -\infty$.

Exercice 17 (Fonctions continues à valeurs discrètes)**.** Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues dont l'image est contenue dans $\mathbb{Z}$? dans $\mathbb{Q}$?

Correction Il s'agit des fonctions constantes, parce qu'une fonction continue qui prend deux valeurs distinctes admet aussi l'intervalle des valeurs intermédiaires entre ces deux valeurs, mais cet intervalle contient toujours de réels non-entiers/non-rationnels.