Feuille 3 : Suites réelles

Exercice 1 (Recherche par dichotomie)**.**

On souhaite, à l'aide d'un ordinateur, rechercher un élément dans un tableau trié (par exemple un mot dans un dictionnaire de mots rangés par ordre alphabétique). L'idée de la recherche par dichotomie est de couper le tableau en deux en son milieu. Pour savoir dans quelle moitié de tableau se trouve l'élément recherché il suffit alors de le comparer au dernier (plus grand) élément de la première moitié de tableau. On ne conserve que la moitié de tableau contenant l'élément recherché, et on recommence ce processus. Après un certain nombre d'itérations de ce processus on se retrouve avec un tableau ne contenant qu'un seul élément, celui recherché.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note u_n la taille des tableaux triés dans lesquels on est capable de rechercher un élément par dichotomie en n étapes. Exprimer u_n en fonction de n.
2. En combien d'étapes peut-on rechercher un élément dans un tableau de taille 1 To ?

Exercice 2 (Variations)**.**

Étudier la monotonie des suites définies par les termes généraux suivants :

1. Pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}$
2. $u_n = n - 2^n$
3. $u_n = \dfrac{e^n}{n!}$,
4. $u_n = (n+1)(n+2)\dots(n+n)$
5. $u_n = \dfrac{n-1}{n+3}$
6. $u_n = n - \sinh(n)$.

Exercice 3 (Variations et majorant/minorant)**.**

Étudier le sens de variation des suites suivantes. Déterminer également, pour chacune de ces suites, les valeurs de $\sup_n u_n$ et $\inf_n u_n$.

1. $u_n = 2^n$
2. $u_n = 2^n + \cos(n)$
3. $u_n = 3^{-n}$
4. $u_n = \dfrac{1}{n+2+(-1)^n}$
5. $u_n = \dfrac{1}{2n+(-1)^n}$

Exercice 4 (Des limites)**.**

Déterminer les limites éventuelles des suites suivantes, définies par leur terme général.

1. $u_n = \dfrac{n+2}{2n-1}$
2. $u_n = \dfrac{3n^2-2n+3}{n^3-1}$
3. $u_n = \dfrac{3n^2-5}{n+4}$
4. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n-1}}$
5. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+5}+n}{\sqrt{n^2+1}}$
6. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
7. $u_n = \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$
8. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
9. $u_n = \dfrac{n-(-1)^n}{2n+(-1)^n}$
10. $u_n = \cos(n\pi)$
11. $u_n = \dfrac{3^n-2^n}{2^n-3^n}$
12. $u_n = \dfrac{2^n}{n^{100}}$
13. $u_n = \cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$
14. $u_n = (-1)^n \dfrac{\cos n}{n}$
15. $u_n = \cos\left(\dfrac{n}{2}\pi\right)$
16. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n+3}}$

Exercice 5 ($(\sin(n))_n$)**.**

L'objectif de cet exercice est de démontrer que la suite $(\sin n)_n$ n'admet pas de limite. On raisonne par l'absurde : on suppose donc qu'il existe un réel ℓ tel que $\lim_n \sin n = \ell$.

1. En exprimant, pour tout entier naturel n, $\sin(n+1)$ en fonction de $\sin n$ et $\cos n$, montrer que la suite $(\cos n)$ admet une limite $\tilde{\ell}$ et donner une relation entre ℓ et $\tilde{\ell}$.
2. Quelle autre relation existe-t-il entre ℓ et $\tilde{\ell}$?
3. Montrer que, pour tout n, on a $\sin(n+1) + \sin(n-1) = 2\sin n \cdot \cos 1$.

4. Déterminer la limite de chacun des membres de cette égalité et en déduire que $\ell = 0$.
5. Conclure.
6. Justifier que la suite $(\sin n)_n$ admet une suite extraite convergente.

Exercice 6 (Suite monotone)**.**
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer qu'elle converge et que sa limite ℓ vérifie :

$$\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1.$$

3. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$.

Exercice 7 (Avec des ϵ)**.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels différents de -1 telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{1+u_n} = 0$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Exercice 8 (Rangs pairs et impairs)**.**
1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante telle que la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente.
2. Soit (v_n) une suite telle que les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers le même réel ℓ. Montrer que la suite (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 9 (Limites et somme)**.**
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n + v_n$.
1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Que peut on dire de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. On suppose que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. Que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Donner un exemple de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergentes telles que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

Exercice 10 (Opérations sur les limites)**.**
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $w_n = u_n^2 + u_n v_n + v_n^2$ soit convergente vers 0.
1. En utilisant une identité remarquable, écrire w_n comme la somme de 2 carrés.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent aussi vers 0.

Exercice 11 (Suites presque géométriques)**.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.
1. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 10$
   (a) Justifier qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} \geq 5u_n$.
   (b) Montrer qu'alors, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq 5^{n-N} u_N$.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
2. On suppose à présent que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$
   (a) Justifier qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$.
   (b) En raisonnant comme avant, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge cette fois vers 0.

Exercice 12 (Suite arithmético-géométrique)**.**
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 8$ et la relation de récurrence $u_n = \frac{1}{2} u_{n-1} + 3$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Résoudre l'équation $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 3$.

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \alpha$. Écrire v_n en fonction de v_{n-1}.
3. Déterminer v_n en fonction de n.
4. Déterminer u_n en fonction de n. Quelle est sa limite ?

Exercice 13 (Suites adjacentes)**.**
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

Exercice 14 (Suites adjacentes - Encore !)**.**
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les suites définies pour tout $n \geq 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
3. Étudier la suite $(v_n - u_n)$.
4. Que peut-on dire des suites (u_n) et (v_n) ? De leur limite éventuelle ?

Exercice 15 (Encadrement)**.**
Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que pour tout k entre 1 et n, on a :
$$\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}.$$
3. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, on a
$$\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}} \leq u_n \leq \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}.$$
4. Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite est égale à 1.

Exercice 16 (Des suites de moyennes)**.**
Soient a et b deux réels tels que $0 \leq a \leq b$. On considère les suites formées par les moyennes géométriques et arithmétiques successives.
On note ainsi : $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. On suppose dans cette question uniquement que $a = 0$. Expliciter les suites (u_n) et $v_n)$ en fonction de n et en déduire leur limite.
2. On suppose dans cette question uniquement que $a = b$. Étudier les suites u_n et v_n.
3. On suppose que a est strictement positif.
   (a) Montrer que, pour tout n, on a $a \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq b$ et $v_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.
   (b) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et admettent la même limite.

Exercice 17 (Moyenne de Cesàro).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante de limite ℓ. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{u_1 + ... + u_n}{n}.$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \ell$. En déduire que (v_n) converge.
3. On note ℓ' la limite de (v_n). Peut-on donner une inégalité entre ℓ et ℓ' ?
4. Établir que $v_{2n} \geq \dfrac{u_n + v_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, en déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ.

Exercice 18 (Téléscopages !).

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n > 0$ par
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$
À l'aide de la question 1, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 19. Classer les suites de termes généraux suivants par ordre de «négligeabilité» :

$$a_n = n^{\frac{1}{3}}, \quad b_n = n^{10}, \quad c_n = (n!)^{\frac{1}{20}}, \quad d_n = \frac{n}{\ln(n)}, \quad e_n = \frac{e^n}{n^5}, \quad f_n = \frac{e^{2n}}{n!}, \quad g_n = 1.$$

Exercice 20. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? Justifier votre réponse.

1. $1000 = \underset{n\to+\infty}{O}(1)$
2. $n^2 = \underset{n\to+\infty}{O}(n^3)$
3. $n^3 = \underset{n\to+\infty}{O}(n^2)$
4. $(n+1)^2 = \underset{n\to+\infty}{O}(n^2)$
5. $2^{n+1} = \underset{n\to+\infty}{O}(2^n)$
6. $2^{2n} = \underset{n\to+\infty}{O}(2^n)$

Exercice 21. Trouver un équivalent le plus simple possible aux suites de termes généraux suivants :

1. $u_n = \dfrac{\sqrt{4n^4 + n^2 + 1} - n}{(\ln(n))^3 - n + 6}$
2. $u_n = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n-2}$
3. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
4. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$

Exercice 22 (Suite récurrente).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$.

1. Etudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x - 1}$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Vérifier en particulier que $f([1, +\infty[) = [1, +\infty[$.
2. Justifier que, pour tout $n \geq 0$, u_n est bien défini et appartient à $[1, +\infty[$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 23 (Une autre suite récurrente).
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_n = \sqrt{1 + u_{n-1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
On notera f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{1 + x}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et vérifie $0 \leq u_n \leq 2$.
2. Montrer par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.